«Наука в Сибири»
№ 1
январь 2004 г.

«НОВАЯ» АЛГЕБРА

Монография академика Юрия Ершова «Кратно нормированные поля» отмечена Государственной премией Российской Федерации 2002 года в области науки и техники. В этой работе, как сказано в аннотации, достаточно полно представлены теория нормированных полей и основы теории прюферовых колец с «геометрической» точки зрения; изложены

алгебраические и теоретико-модельные свойства кратно нормированных полей с почти булевыми семействами колец нормирования, удовлетворяющих локально-глобальному принципу. Книга заинтересует исследователей в области коммуникативной алгебры и математической логики.

Премию и отличительные знаки лауреатов, как известно, вручают в Москве. Накануне этого торжественного события, почти в канун Нового года, корреспондент «НВС» Галина Шпак беседовала с директором Института математики СО РАН академиком Юрием Ершовым в его кабинете.

Оказалось, что Юрий Леонидович узнал о присуждении ему Государственной премии только по интернету. Он в то время находился в Германии, и заглянув на сайт Президента РФ в раздел «Документы», убедился в достоверности факта: Указом Президента России от 13 декабря 2003 года присуждены двадцать три Государственные премии Российской Федерации 2002 года в области науки и техники. Среди лауреатов — большая группа ученых Сибирского отделения Российской академии наук, о чем сообщалось в «НВС» (N 49, декабрь 2003 г.).

— Но все центральные газеты промолчали, — сказал Юрий Леонидович, — даже официальная «Российская газета»...

— Будем считать, что это предновогодние сюрпризы... Юрий Леонидович, ваша книга мне даже внешне понравилась, она очень хорошо издана.

— У нас уже вышла целая серия математических книг Сибирской школы алгебры и логики, издаются они Сибирским фондом алгебры и логики и одновременно публикуются на английском языке (Kluwer Academic/Plenum Publishers).

— Я удивилась, что ваша первая книга в этой серии «Определимость и вычислимость», которая вышла вторым изданием в 2000 году, совершенно другая, нежели «Кратно нормированные поля» (год издания

2000). Кстати, она оказалась седьмой в этой серии. Я ее внимательно просмотрела. Это же более трехсот страниц теорем и лемм! Прочитала ваше предисловие и очень интересные библиографические замечания. Но. может быть, поговорим сначала о современной «новой» алгебре? Я вычитала, возможно, вы это отвергнете, что в двадцатом веке вся алгебра перестраивалась по образцу теории групп, становясь «учением об алгебраических операциях, определенных над элементами произвольной природы, и исследует в самом общем виде такие множества элементов с определенными на них операциями. иначе говоря, изучает алгебраические структуры». Как вам это сравнение?

— Более или менее близко к истине... Теория групп — это часть алгебры.

— Я клоню к тому, что взлет алгебры и математической логики произошел, как мне кажется. в шестидесятые годы прошлого века, когда и вы начали активно работать в этих областях математики. Не так ли?

— Я бы так сказал, — было и есть независимое развитие алгебры; было и есть независимое развитие математической логики.

— В чем же они сошлись?

— А вот их симбиоз, я считаю, это фундаментальное открытие моего учителя академика Анатолия Ивановича Мальцева. Он показал, что математическая логика, которая создавалась для прояснения оснований математики, может быть вполне успешна и в применениях внутри самой математики и в первую очередь в алгебре. В 1941 году А. Мальцев опубликовал знаменитую свою работу об одном новом общем методе получения локальных теорем в теории групп. Как раз теория групп, о чем вы говорили, тут тоже возникает. Анатолий Иванович действительно совершил открытие, но дело в том, что это случилось в сорок первом году, шла война. К тому же, статья была опубликована в Трудах Ивановского педагогического института (г. Иваново), поэтому мало кто знал у нас об этом открытии, а за рубежом совсем не знали. В начале пятидесятых годов произошло некоторое переоткрытие, как говорится, но на более простом уровне. Сам Мальцев вернулся к своим исследованиям, и действительно, в начале шестидесятых годов прошлого века начался бурный процесс, как бы синтез, применения математической логики к алгебре. И Анатолий Иванович в этом участвовал, и я начал этим заниматься. Так что моя книга «Кратно нормированные поля» — итог тридцатипятилетней работы. Опубликована она, как вы знаете, в 2000 году, а первые важные результаты были получены в 1965 году.

— Можно ли не так специфично, как изложено в аннотации и в предисловии, представить содержание, смыслы — сущности ваших построений?

— Это достаточно трудно... Известно, что одним из самых древних разделов математики является теория чисел, теория целых рациональных чисел. Она до сих пор вполне живущая отрасль математики. Вы, наверное, слышали, что великая теорема Ферма (1601—1665) наконец-то получила решение в общем виде в 1994 году. Числа — особенно целые и натуральные — предмет внимания математиков в течение всей истории науки. Удивительно то, что сами объекты достаточно простые — один, два, три, четыре, пять... Теория чисел — одна из немногих областей математики, где очень легко можно задавать вопросы — вот как Ферма задал вопрос, — а отвечать на большинство из них очень трудно. Остается искать активные способы, чтобы расширить этот объект, то есть включить, скажем, рациональные числа в более богатые объекты, которые называются полями (не путать с физическими полями!). Поля — алгебраическое понятие, объекты которых можно назвать числами. Их можно умножать, складывать, делить (если не на ноль!). Можно вкладывать рациональные числа в разные поля, некоторые из них более простые с математической точки зрения. Классический объект теории чисел — разрешимость уравнений. Допустим, пишется какое-то уравнение: пять икс квадрат плюс семь икс минус три равно нулю. Как найти корень этого уравнения, какой икс подставить, чтобы получить разрешимость уравнения? Такими вещами занимались со времен древних греков и до наших дней. В 1970 году ленинградский математик Ю. Матиясевич решил десятую проблему Гильберта — доказал, что нет алгоритма, который по уравнению или по системе уравнений отвечал бы на вопрос: есть ли решение? В таких случаях можно руки опустить, а можно находить решение, как я сказал, в каких-то расширениях, в других объектах. Такие поля, такие расширения, как поле всем известных вещественных чисел (координатами точек прямой являются, например, вещественные числа). И возможно рациональные числа вложить в так называемые р-адические числа. С ними связана моя первая работа — докторская диссертация об элементарных теориях локальных полей.

— **А так называемые АКЕ-теоремы?**

— Они и вошли в мою первую работу.

— **Интересно было узнать историю названия этих именных теорем. Об этом сказано у вас в библиографических замечаниях. Между прочим, столкнувшись с непонятным термином «гензализаиия», я из любопытства докопалась до исходного — нашла К. Гензеля с его «Теорией алгебраических чисел», в том числе р-адических. Извините, что перебила вас...**

— Вот история этих теорем. Существовал явно сформулированный вопрос известным логиком Альфредом Тарским, который доказал разрешимость теории поля вещественных чисел. То, что с ними просто работать, это точная теорема, утверждающая, что на любой вопрос, который вы можете задать о вещественных числах, сформулированный на достаточно богатом формальном языке, —всегда можно получить ответ. Есть алгоритм, он отвечает на все вопросы. Есть другое пополнение — р- адические числа; а для них тоже есть алгоритм? Так сам Тарский поставил вопрос — разрешима ли теория р-адических чисел? В свое время этот вопрос привлекал внимание математиков, и он был решен мной в 1965 году и независимо американцами Дж. Аксом и С. Коченом. Мы доказали не только разрешимость, но и развили некоторую теорию, из которой вытекает это решение. Здесь возникает второй объект — нормирование, а затем кольца нормирования. Они оказались полезными и в теории чисел, и в алгебраической геометрии. Наша работа — трех авторов — показала, что среди колец нормирования так называемые гензелевы кольца нормирования допускают очень хорошую теорию, про них сразу можно все сказать.

— **Юрий Леонидович, но вы сами пишите, что только в последние годы вы пришли к такому ясному видению проблем.**

— Да, но я хочу идти дальше. Просто о кольцах нормирования было более-менее ясно в середине шестидесятых годов прошлого века. У тех же рациональных чисел таких колец нормирования бесконечно много. С каждым простым числом p связано p-адическое нормирование, пополнение которого является полем p- адических чисел. Вопрос состоял в том, что нельзя ли придумать что-то аналогичное свойству гензельности уже для семейства колец нормирования, таких как в рациональных числах?

Гензализация — это чисто алгебраическая конструкция, применимая для произвольных колец нормирования, в том числе и таких, для которых топологическое пополнение не является «хорошим»... Здесь работа делалась по шагам. Я нашел правильное определение в начале восьмидесятых годов в случае конечного числа колец нормирования и опубликовал в «Успехах математических наук» большую статью «Кратные нормированные поля». Следующим шагом был переход к бесконечным семействам так называемым — «булевым». Не буду вдаваться в абстракции, скажу только, что это означает бесконечное число колец нормирования с некоторыми ограничениями. Ну и, наконец, последний шаг был сделан в конце девяностых годов, когда фактически дописывалась книга, и я понял, как возможно правильно расширить теорию для так называемых почти булевых семейств, а это как раз годится для кольца целых чисел. Кольцо целых чисел как бы кодирует почти булевое семейство колец нормирования.

— **Ваши построения грандиозно звучат — прямо как вагнеровское «Кольцо нибелунга».**

— Не знаю... Но теория усложнялась каждый раз. Алгебра, логика в принципе дискретны. Но вот для того, чтобы хорошо описывать некоторые явления, происходящие «внутри» дискретной математики, нужна некоторая непрерывность, топология нужна. И вот переход от конечного к бесконечному был связан с осознанием четким, что надо было обнаружить непрерывность локальных элементарных свойств.

— **А окончательный итог, summa summarum?**

— Это теоретическая работа, позволяющая описать достаточно четко целый класс полей с выделенными подкольцами, для которых есть хорошая теория.

Теория построена и опубликована в книге. Затем последовали приложения к рациональным числам в других моих работах. Я обнаружил так называемые удивительные расширения поля рациональных чисел. Оказалось, что у него существует такое расширение, которое сохраняет большее число свойств рациональных чисел, чем поля р-адических чисел, но тем не менее имеет разрешимую теорию. Иначе говоря, можно любой вопрос задать и получить ответ, то есть, как я уже говорил, существует алгоритм решения. Выяснилось, что это расширение в некотором неклассическом смысле — единственное. Это тоже явление довольно любопытное. На самом деле эти удивительные расширения не единственные, но они имеют одну и ту же теорию. Они обладают ровно теми же свойствами. Они неизоморфны между собой, их нельзя вместе складывать, но они существуют, их теория однозначно определена. Их можно использовать для формулировки классических вещей из арифметики. В 2003 году в «Докладах РАН» вышла моя заметка «Хорошие расширения и глобальная теория полей и классов». Это уже приложения всей этой теории к довольно классическим разделам теории чисел.

— **А дальше? Мне бы хотелось прояснить некоторые вещи. В аннотации сказано, что ваша книга предназначена для исследователей в области коммутативной алгебры и математической логики. Вы ведь говорили о синтезе, да?**

— Более точно нужно понимать следующее — идет не просто синтез двух больших ветвей математики. Речь идет о достаточно глубоких применениях из двух областей к конкретным разделам коммутативной алгебры, в том числе, в частности, связанной с теорией чисел. Это не есть синтез алгебры и математической логики. Синтез — это теория моделей, теория алгебраических систем. Такими структурами и Анатолий Иванович Мальцев занимался. Это как бы общий каркас. А вопрос состоит в нетривиальных применениях этих сложных теорий.

— **Можно сказать, что новая алгебра вырастила собственное древо, если рассматривать сильно разросшееся древо математики в целом?**

— Да, безусловно, так. Вот вы упомянули теорию групп — это одна из ветвей абстрактной алгебры. Собственно, абстрактная алгебра началась с теории групп, с известной теории Галуа и других. И теория колец, и теория полей. Есть более древняя — теория чисел, у нее есть свои разветвления. Есть алгебраическая геометрия.

— **У вас в книге есть теоремы на этот счет. Вы считали, сколько у вас теорем?**

— Нет, конечно (смеется).

— **Напомню, что ваша книга оказалась седьмой в математической серии, а у древних, кажется, семерка считалась счастливым числом. Этой книгой вы как бы попрощались с двадцатым веком. А как бы вы оценили**

вещественно деятельность Сибирской школы алгебры и логики, чем она отличается от других математических школ?

— Во-первых, она работает широко, а во- вторых, ее отличает даже само название — «школа алгебры и логики». Название нетрадиционно. Обычно в университетах логику или основания математики почему-то читали геометры, может быть, повлияла книга Гильберта «Основания геометрии» и это была «общепринятая логика». В той же Москве или Ленинграде, теперь Санкт-Петербурге, специалисты-логики алгебры в принципе не знали и занимались чисто логическими вопросами. А в Новосибирске основатель школы Анатолий Иванович Мальцев был глубоким специалистом именно в обеих областях и в синтезе алгебры и логики. В Сибири кафедры алгебры и логики существуют не только в НГУ, но и в Иркутском, Алтайском университетах, в Новосибирском техническом университете и в Казахстане. И в исследованиях по алгебре часто пользуются логикой, изучают алгоритмические вопросы. Это очень типично для Сибирской школы, я бы так сказал — равное владение этими двумя до недавнего времени далекими ветвями математики.

— Вы назвали имя Гильберта, а он. очевидно. был остроумным человеком. Известна его шутка, он любил повторять, что в геометрии вместо точек, прямых, плоскостей можно было бы говорить о столах, стульях и кружках пива. А в алгебре?

— То же самое. Это просто характеризует аксиоматический подход, который и в алгебре распространен. Вы же цитировали высказывание об операциях, объектах произвольной природы. Кружки — это тоже объекты природы, поэтому над ними тоже можно производить некоторые алгебраические операции.

— Лучше кружки пива заменим на шампанское. согласно торжественному случаю.

Источник:

Шпак Г. «Новая» алгебра // Наука в Сибири. – 2004. – N 1. – С. 2.