ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ*

Некоторые явления, наблюдаемые в течениях вязкой жидкости, трудно объяснимы на основе уравнений Навье-Стокса. Например, потеря устойчивости течения между цилиндрами при вращении только внешнего цилиндра [1]. неединственность вторичных режимов в течениях между вращающимися сферами и цилиндрами [2]. Как правило, эти явления имеют место при больших градиентах скоростей потока. В данной работе предполагается, что при больших градиентах скоростей вязкая жидкость проявляет свойство упругости. В результате эффективная вязкость становится переменной величиной и может принимать отрицательные значения. Различные модели жидкости со знакопеременной вязкостью предложены в работах [3 - 5].

Предположим, что выделенный объем жидкости претерпевает заданную конечную деформацию. Используя условия равновесия в форме Лагранжа, можно получить [6], что силы внутренних напряжений выражаются через обобщенный тензор напряжений T_{ik}. В начальной декартовой системе координат T_{ik} имеет вид

$$T^0_{ik} = T^0_{il}\,(\delta_{lk} + \partial u_k/\partial x_l) \qquad (1)$$

где T^0_{ik} - симметричный тензор множителей Лагранжа, u_i, - компоненты вектора перемещений. Несимметричность тензора обусловлена нелинейностью тензора деформаций. При малых деформациях в (1) можно пренебречь величиной $\partial u_k/\partial x_l$. Поэтому T_{ik} является симметричным тензором напряжений вязкой несжимаемой жидкости,

$$T^0_{ik} = p\delta_{ik} + \mu D_{ik}$$

p — давление, D_{ik} - тензор скоростей деформации. Как следует из формул (1). (2), при конечных деформациях в жидкости возникают упругие напряжения с модулями упругости, зависящими от градиента скорости.

Будем считать, что основные эффекты упругости могут быть учтены с помощью переменной вязкости, и рассмотрим уравнения движения следующего

$$\begin{gathered}
\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[W(\zeta)D_{ij} + Y(\zeta)\,|\Gamma_{ij}|\right] + f_i;\quad \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0;\\
D_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i},\quad \Gamma_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i};\\
\zeta = \alpha_1|\Gamma|^2 + \alpha_2|D|^2,\\
|\Gamma|^2 = \sum_{i>j}(\Gamma_{ij})^2,\quad |D|^2 = \sum_{i\geq j}(D_{ij})^2,
\end{gathered} \qquad (3)$$

где непрерывно дифференцируемые функции $W(\zeta)$, $Y(\zeta)$ удовлетворяют условиям

$$W(0) = \nu > 0,\quad Y(0) = 0. \qquad (i)$$

Исследуем задачу об устойчивости течения между вращающимися концентрическими цилиндрами. Пусть r_1, Ω_1 - радиус и угловая скорость вращения внутреннего цилиндра, r_2, Ω_2 - радиус и угловая скорость внешнего цилиндра. Известно, что стационарное ламинарное течение имеет отличной от нуля только азимутальную состав-

$$\begin{gathered}
v_0(r) = Ar + B/r,\\
A = \frac{\Omega_2 r_2^2 - \Omega_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2},\quad B = \frac{(\Omega_1 - \Omega_2)\,r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}.
\end{gathered} \qquad (4)$$

Запишем уравнения (3) в $f_i = 0$ в цилиндрической системе координат и будем искать решения вида

$$v_r = v_z = 0,\quad v_\varphi = \bar{v}(r).$$

Получим

$$-\frac{\overline{v}^2}{r}+\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr}=0,$$

$$\left\{W+Y+2\alpha_1\frac{dW}{d\zeta}\left[\left(\frac{d\overline{v}}{dr}\right)^2-\left(\frac{\overline{v}}{r}\right)^2\right]+2\alpha_1\frac{dY}{d\zeta}\left(\frac{d\overline{v}}{dr}+\frac{\overline{v}}{r}\right)^2\right\}L\overline{v}+$$

$$+2\alpha_2\left\{\frac{dW}{d\zeta}\left(\frac{d\overline{v}}{dr}-\frac{\overline{v}}{r}\right)^2+\frac{dY}{d\zeta}\left[\left(\frac{d\overline{v}}{dr}\right)^2-\left(\frac{\overline{v}}{r}\right)^2\right]\right\}\frac{d}{dr}\left(\frac{d\overline{v}}{dr}-\frac{\overline{v}}{r}\right)=0,$$

$$L\overline{v}=\frac{d}{dr}\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)\overline{v}.$$

Потребуем, чтобы выполнялось равенство $\overline{v}(r) = v_0(r)$. Тогда, как нетрудно показать, нужно положить $\alpha_2 = 0$, т.е. функции $W(\zeta)$, $Y(\zeta)$ должны зависеть лишь от завихренности течения. Для удобства проведения выкладок положим $\alpha_1 = 1/8$. Пусть

$$v_r = u'(r, z, t),\quad v_\varphi = v_0(r) + v'(r,z, t),\quad v_z=q'(r,z, t),$$

$$p = p_0(r)+p'(z, z, t),\quad u' = u(r)\cos\lambda z e^{\sigma t},$$

$$v' = v(r)\cos\lambda z e^{\sigma t},\quad q' = q(r)\sin\lambda z e^{\sigma t}.$$

Линеаризованная относительно возмущений скорости система (3) эквивалентна системе уравнений для безразмерных функций u и $\widetilde{v}$

$$(\widetilde{L}-\widetilde{\lambda}^2)^2u-\widetilde{\sigma}(\widetilde{L}-\widetilde{\lambda}^2)u=TA\omega_0\widetilde{v}, \tag{5}$$

$$[1+\theta-\chi\varphi(\xi)]\widetilde{L}\widetilde{v}-(\widetilde{\sigma}+\widetilde{\lambda}^2)\widetilde{v}=u,$$

где

$$\omega_0=A+B/r^2,\quad A=(1-\beta\eta^2)/(1-\eta^2),\quad B=(\beta-1)\eta^2/(1-\eta^2),\quad \beta=\Omega_1/\Omega_2,$$

$$\eta=r_1/r_2,\quad \varphi(\xi)=\eta^2/(1+\delta\xi)^2,\quad \delta=1-\eta,\quad \theta=\frac{\Omega_2^2A^2}{W_0+Y_0}\frac{dY_0}{d\zeta},$$

$$\chi=\frac{\Omega_2^2AB}{(W_0+Y_0)\eta^2}\frac{dW_0}{d\zeta},\quad Y_0=Y(\zeta_0),\quad W_0=W(\zeta_0),$$

$$\zeta_0=½\,\Omega_2^2A^2,\quad \widetilde{\lambda}=\lambda\delta,\quad \widetilde{\sigma}=R_0\delta^2\sigma,\quad v=2\delta^2R_0A\widetilde{v},$$

$$R_0=\Omega_2r_2^2/(W_0+Y_0),\quad T=4R_0^2\delta^4\lambda^2,\quad \widetilde{L}=\frac{d}{d\xi}\left(\frac{d}{d\xi}+\frac{\delta}{1+\delta\xi}\right).$$

Функции $u(\xi), \widetilde{v}(\xi)$ должны удовлетворять граничным условиям вида
$u = du/d\xi = \widetilde{v} = 0$ при $\xi = 1{,}0$.

В случае когда зазор между цилиндрами δ является малой величиной, можно показать, что спектр задачи (5), (6) лежит в полубесконечной полосе

$$\mathrm{Re}\,\widetilde{\sigma} < \mathrm{const},\qquad |Im\,\widetilde{\sigma}| < \mathrm{const}\cdot\delta, \tag{7}$$

Из требования корректности задачи Коши для возмущений скорости и оценки (7) вытекает ограничение на вид функций W и Y

$$W+Y>0. \tag{ii}$$

После несложных выкладок можно получить следующее выражение для $\mathrm{Re}\,\widetilde{\sigma}$:

$$\operatorname{Re}\tilde{\sigma} = -\Big[\int_{-1}^{0}\Big(\Big|\frac{d^2u}{d\xi^2}\Big|^2 + 2\tilde{\lambda}_2\Big|\frac{du}{d\xi}\Big|^2 + \tilde{\lambda}^4|u|^2\Big)d\xi +$$
$$+ TA\bar{\omega}_0\Big[\int_{-1}^{0}(1+\theta-\chi\varphi)\Big|\frac{d\tilde{v}}{d\xi}\Big|^2 d\xi + \tilde{\lambda}^2\int_{-1}^{0}|\tilde{v}|^2 d\xi\Big]\Big]\Big[\int_{-1}^{0}\Big(\Big|\frac{du}{d\xi}\Big|^2 +$$
$$+ \tilde{\lambda}^2|u|^2\Big)d\xi + TA\bar{\omega}_0\int_{-1}^{0}|v|^2 d\xi\Big]^{-1} + O(\delta), \qquad (8)$$

$\bar{\omega}_0$ — среднее значение ω_0.

Из уравнений Навье-Стокса следует [7] устойчивость течения Куэтта при $A > 0$ ($\beta < 1/\eta^2$). В нашем случае, как показывает формула (8), нарастающие возмущения могут существовать и при положительных значениях A, если $\chi - \theta > 1$. Этот вывод подтверждается численными расчетами собственных значений задачи (5), (6) при фиксированных χ и θ.

Зададимся конкретным видом функций $W(\zeta)$, $Y(\zeta)$ и построим диаграмму устойчивости в плоскости (R_1, R_2):

$$R_1 = r_1^2\,\Omega_1/\nu, \quad R_2 = r_2^2\,\Omega_2/\nu$$

Пусть $W(\zeta)$ имеет вид

$$W(\zeta) = \nu\,(1 - \bar{v}_1\bar{\zeta} + \bar{v}_2\bar{\zeta}^2) \equiv \nu\bar{W}(\bar{\zeta}); \quad \bar{v}_1\bar{v}_2 > 0$$

$\bar{W}(\bar{\zeta})$ - безразмерная функция.

При этом

$$W_0 = \nu\ \bar{W}(\bar{W}_0),\ \bar{\zeta}_0 = ½ A^2.$$

Будем считать, что безразмерные параметры $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ не зависят от R_1 и R_2.

1. Рассмотрим случай, когда $\bar{W}(\bar{\zeta}) > 0$ при всех $\bar{\zeta}$. Тогда можно положить $Y(\zeta) = 0$. Получим

$$\theta = 0,\ \chi = \frac{AB}{\eta^2}\,\frac{1}{\bar{W}(\bar{\zeta}_0)}\,\frac{d\bar{W}}{d\bar{\zeta}}(\bar{\zeta}_0), \qquad T = \frac{4R_2^2\delta^4\lambda^2}{\bar{W}^2}$$

Обозначим через β_{0i} значения β, соответствующие точке минимума функции $\bar{W}(\bar{\zeta}_0)$. В этой точке χ меняет знак:

$$\beta_{01} = \eta^{-2}\,[\,1 - (1 - \eta^{-2})(\bar{v}_1/\bar{v}_2)^{½}\,] < \eta^{-2}$$
$$\beta_{02} = \eta^{-2}\,[\,1 + (1 - \eta^{-2})(\bar{v}_1/\bar{v}_2)^{½}\,] > \eta^{-2}$$

В области $R_1 > R_2$ ($\beta > 1/\eta^2$) граница устойчивости ламинарного течения качественно совпадает с границей Тейлора и имеет вид, приведенный на рисунке, кривая 1. При $R_1 < R_2$ возможны три различных случая расположения области неустойчивости.

а) Пусть $1 < \beta_{01} < 1/\eta^2$. Область неустойчивости лежит внутри кривой 2 (см. рис.). Прямые L_1, L_2, задаются уравнениями

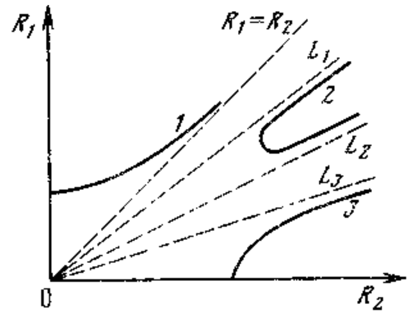
$$\beta|_{L_1} = \beta_{01}, \quad \beta|_{L_2} = 1$$

б) $0 < \beta_{01} < 1$. Качественно область неустойчивости имеет тот же вид, что и в случае а), только меняются уравнения для прямых L_1, L_2:

$$\beta|_{L_1} = 1, \quad \beta|_{L_2} = \beta_{01}$$

в) Если $\beta_{01} < 0$, то граница устойчивости определяется кривой 3 (рис.), а прямая L_3 задается уравнением

$$\beta|_{L_3} = 1.$$



2. Предположим, что $\overline{W}\,(\bar{\zeta})$ может принимать отрицательные значения. Тогда в силу условия (*ii*) $Y(\zeta) \not\equiv 0$. Если положить

$$Y = \nu\,\overline{Y}\,(\bar{\zeta}) = \nu\,(\bar{k}_1\,\bar{\zeta} - \bar{k}_2\,\bar{\zeta}^{\,2}), \qquad \bar{k}_1,\ \bar{k}_2 > 0$$

то коэффициенты $\nu_i\ k_i$, можно выбрать гак, что при $\beta < 1$ течение Куэтта будет иметь две нейтральные кривые, аналогичные кривым *2 к 3* на рисунке 1.

Как показано, уравнения движения (3) позволяют объяснить неустойчивость течения Кузтта при $R_2 > R_1 \geqq 0$, наблюдавшуюся в экспериментах [1], Положение области неустойчивости в плоскости $(R_1,\ R_2)$ определяется видом функции вязкости. В частности, для неустойчивости течения при неподвижном внутреннем цилиндре необходимо, чтобы функция $W(\zeta)$ имела участки с отрицательной производной. Если $W(\zeta)$ - знакопеременная функция, то могут существовать две области неустойчивости. Вполне возможно, что неединственность границы устойчивости, которая наблюдалась в зоне гистерезиса перехода [1], связана с наличием двух нейтральных кривых.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Coles D.* // J. Fluid Mech. 1965. Vol. 21. P. 385- 425
2. *Roesner K G.* // Lect. Notes Phys. 1979. Vol. 90. P. 1-25.
3. *Яненко Н.Н., Новиков В.А.* // Числ. методы механики сплош среды. 1973. Т. 4, № 2.
4. *Зеленяк Т.И., Новиков В.А., Яненко Н.Н.* // Там же. 1974. Т. 5, N° 4.
5. *Яненко Н.Н.* // Там же. 1976. Т. 7, № 1.
6. *Работнов Ю.Н,* Механика деформируемого твердого тела. М : Наука, 1979. 744 с.
7. *Линь Ц.Ц.* Теория гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 192 с.

---

*Докл. АН СССР. 1984, Т. 275, № 3. С. 576-579. (Соавтор Б.Ю. Скобелев.)