ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ АНАЛИЗАТОРЫ УДАРНЫХ ВОЛН*

Существующие в настоящее время алгоритмы определения положения фронта ударной волны в газодинамических течениях по максимуму искусственной вязкости не имеют обоснования. В работе сформулированы и доказаны теоремы, которые обосновывают практические способы локализации ударных фронтов в расчетной области по результатам сквозного счета.

1. Введем ряд определений.

Определение 1. Дифференциальный анализатор - алгоритм, предназначенный для локализации особенностей по результатам сквозного счета задач механики сплошной среды.

Определение 2. Под дифференциальным анализатором ударной волны будем понимать алгоритм, позволяющий найти координаты центра конечно-разностной ударной волны в расчетной ячейке по результатам сквозного счета.

Определение 3. Центром конечно-разностной ударной волны (ц.к.р.у.в) на-зовем точку, положение которой не зависит от шага сетки h в системе координат, связанной с ударной волной.

Рассмотрим задачу о стационарной ударной волне в газе. Следуя работе [1], запи-шем уравнения одномерной газовой динамики в эйлеровых переменных при нали-чии искусственной вязкости q, аддитивно входящей в давление, в координатной системе, движущейся с постоянной скоростью ударной волны D:

$$\rho u = C_1 = m, \qquad (p+q) + mu = C_2 \tag{1}$$

$$m\,(p/(\rho(\gamma-1)) + \tfrac{1}{2}u^2) + (p+q)\,u = C_3$$

здесь ρ, u, p - соответственно плотность, скорость и давление газа, $\gamma = \mathrm{const}$, C_1, C_2, C_3 - постоянные интегрирования. Для определенности предположим, что ударная волна движется слева направо; тогда $D > 0$, $m < 0$. Величины, определяю-щие состояние за фронтом ударной волны, будем помечать нижним индексом 1, а перед фронтом - индексом 2; пусть $v = 1/\rho$.

Теорема 1. *Пусть искусственная вязкость q, входящая в уравнения* (1), *имеет вид*

$$q = \begin{cases} F\,(hdu/dx, \quad hdp/dx, \quad hd\rho/dx,\ p,\ \rho) & du/dx < 0, \\ 0, \quad du/dx \geqslant 0 \end{cases} \tag{2}$$

(h - шаг расчетной сетки), и система уравнений (1), (2) *однозначно разрешима относительно dv/dx, так что*

$$dv/dx = /(\mathrm{C}_1,\mathrm{C}_2,\mathrm{C}_3,\ v,\ h), \tag{3}$$

где $f\,(C_i,\ v,\ h)$ положительна в интервале $(v_1,\ v_2)$, а функция

$$\Phi(Ci,v,h) = \int \frac{dv}{f(C_i v, h)} \tag{4}$$

непрерывна по v и меняет знак на (v_1, v_2); *тогда существует единственный центр конечно-разностной ударной волны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о . Рассматривая систему уравнений (1), (2) как систему трех уравнений относительно четырех функций ρ, u, p, q, найдем u, p, q как функции v и подставим в обе части равенства (2), в результате чего получим обыкновенное дифференциальное уравнение относительно $v(x)$. Используя метод доказательства II-теоремы [2], нетрудно показать, что функция $f\,(C_i,\ v,\ h)$, входящая в (3) , имеет структуру

$$f\ (C_i, v, h) = h^{-1} v_1 \varphi\,(v/v_1,\ v_2/v_1)$$

где константы C_i из (1) исключены через v_1, v_2. Следовательно, функция $\Phi(v,h)$ согласно (4) имеет вид

$$\Phi\,(v,\ h) = h\Phi_1\,(v), \qquad \Phi_1(v) = \frac{1}{v_1} \int \frac{dv}{\varphi(v/v_1, v_2/v_1}\,.$$

Таким образом, решение уравнения (3) выражается формулой

---

* Докл. АН СССР. 1976. Т. 227, № 1. С. 50-53. (Соавторы Е.В. Ворожцов, В.М. Фомин)

$$\Phi_1(v) = (x\text{-}x_0)/h,$$

где x_0 - постоянная интегрирования. В силу того, что $\Phi_1(v) > 0$ и функция $\Phi_1(v)$ меняет знак в интервале (v_1,v_2), уравнение $\Phi_1(v) = 0$ имеет единственный корень $v_0 \in (,v_1, V_2)$. Таким образом, точка x_0 по определению является центром конечно-разностной ударной волны, что и требовалось доказать.

Следствие. Если $\Phi_1(\sqrt{v_1 \cdot v_2} < 0$ $[\Phi_1(\sqrt{v_1 \cdot v_2}) > 0]$ то точка максимума искусственной вязкости находится левее (правее) ц.к.р.у.в. Если кроме того удов-

$$|\Phi_1(\sqrt{v_1 \cdot v_2})| \leqslant B,$$ то точка максимума искусственной вязкости q отстоит от ц.к.р.у.в. на расстояние, не превосходящее Bh.

Теорема 2. *Пусть вязкость* (2) *удовлетворяет условиям теоремы* 1 *и кроме того имеет место равенство* $\Phi''(v(x_0)) = 0$, где x_0 - центр конечно-разностной ударной волны; тогда точка x_0 совпадает с точкой экстремума функций

$$|du/dx|,\ dv/dx,\ |d(p+q)/dx|. \tag{5}$$

Если, кроме того, $\Phi_1'''(v(x_0)) > 0$ $(\Phi_1'''(v(x_0)) < 0)$, то x_0 - точка максимума (локального минимума) функций (5).

В табл. сведены результаты исследования существования ц.к.р.у.в. при использовании некоторых искусственных вязкостей вида (2) в газодинамических расчетах

$$(1+\eta)^2(\gamma+1)\,[4\sigma_2 - a\,\sigma_1^2(\gamma-1)]^2 - 4\eta\,[a\,\sigma_1^2\,\gamma(\gamma-1) - 4\sigma_2(\gamma+1)] \times$$

$$\times (a\,\sigma_1^2\,\gamma - 4\sigma_2) \geqslant 0, \tag{6}$$

$$a^2\sigma_1^2\,\gamma(\gamma-1) < 1, \tag{7}$$

$$b > \left[\eta - \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right]\left\{(\gamma-1)\left[2\gamma\left(\eta^2 - \frac{\gamma+1}{\gamma}\eta(1+\eta) + \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\eta\right)\right]^{-1}\right\}^{1/2} \tag{8}$$

В неравенствах (6) - (8) a, σ_1, σ_2, b - безразмерные постоянные, $\eta = v_2/v_1$.

Теорема 3. *Если задан максимум искусственной вязкости* q (2) *и состояние среды перед фронтом ударной волны, описанной системой уравнений* (1), *то состояние за фронтом ударной волны и ее скорость определяются однозначно.*

2. Ширина размазанного фронта конечно-разностной ударной волны зависит не только от величин искусственной, но и схемной вязкости. Порядок схемной вязкости определяется выбранной численно аппроксимацией системы уравнений и

Таблица

q	Существует ли ц.к.р.у.в.?	Практический критерий нахождений ц.к.р.у.в.	Литература
$ah^2\rho\left(\frac{du}{dx}\right)^2$	Да	по max $\mid du/dx \mid$ при $du/dx < 0$	[1]
$-ahc_0\rho\,\frac{du}{dx}$	Да	по max $\mid du/dx \mid$ при $du/dx < 0$	[3]
$-ahc\rho\,\frac{du}{dx}$	Да	по max q при $du/dx < 0$ $\mid \Phi_1(\sqrt{v_1v_2}) \mid < 1$	[4]
$ah\rho\,\frac{du}{dx}\left(\sigma_1 c + \sigma_2 h\left\lvert \frac{du}{dx} \right\rvert\right)$	Да при (6) и (7)	по max q при $du/dx < 0$ $\mid \Phi_1(\sqrt{v_1v_2}) \mid < 1$	[5]
$-hac\rho\left[1 + bc\rho\frac{du/dx}{dp/dx}\right]\frac{du}{dx}$	Да при(8)	по max q при $du/dx < 0$ $\mid \Phi_1(\sqrt{v_1v_2}) \mid < 1$	

поэтому существенно влияет на положение ц.к.р.у.в. В связи с этим представляется разумным вопрос о существовании ц.к.р.у.в. исследовать с помощью дифференциальных приближений разностной схемы [4]. Рассмотрим гиперболическую систему уравнений

$$\partial u/\partial t + \partial \varphi(u) / \partial x = 0, \qquad u = (u_1, \dots u_n), \qquad \varphi = (\varphi_1, \dots \varphi_n). \qquad (9)$$

Прежде чем сформулировать теорему, введем ряд обозначений. Пусть $w(x, t)$ -вектор-функция, которая в узлах сетки совпадает с решением конечно-разностных уравнений, аппроксимирующих систему (9), а в остальных точках (x, t) доопределена из требования существования производных

$$\frac{\partial^{i+j} w(x,t)}{\partial x^i \partial t^j}, \qquad 1 \leqslant i + j \leqslant 3, \quad i \geqslant 0, \quad j \geqslant 0,$$

$T_{\pm h}$, $T_{\pm\tau}$ - операторы сдвига по x и по t такие, что $T_{\pm h} w(x, t) = w(x \pm h, t)$;
$T_{\pm\tau} w(x, t) = w(x, t \pm \tau)$, τ — временной шаг, E — тождественный оператор.

Теорема 4. *Если конечно-разностная схема в целых шагах, аппроксимирующая систему* (9), *представима* в *виде*

$$\tau^{-1} C\{\beta_1 [T_\tau - \alpha_3 T_{\mathrm{h}}\ \alpha_4 E + \alpha_5 T_{-\mathrm{h}})] + \beta_2 [\alpha_6 T_{\mathrm{h}} + \alpha_7 E + \alpha_8 T_{-\mathrm{h}}) - T_{-\tau}]\} \times$$

$$\times\, w(x, t) + h^{-1} [\alpha_1 (T_{\mathrm{h}} - E) + \alpha_2 (E - T_{-\mathrm{h}})] [\beta_3 T_\tau + \beta_4 E + \beta_5 T_{-\tau}]\ \varphi(w(x,t)) =$$

$$= h^{-1} (T_{\mathrm{h}/2} - T_{-\mathrm{h}/2}) \{ h^{-1} \Omega (w(x, t)) (T_{h/2} - T_{-h/2}) [\beta_6 T_\tau + \beta_7 E + \beta_8 T_{-\tau}] \}\ w(x, t)$$

и выполнены условия:

а) C - *трехточечный оператор такой, что его второе дифференциальное приближение* $\widetilde{C}$ *имеет вид*

$$\widetilde{C} = E + \sum_{i+1}^{2} h^i \frac{\partial^i}{\partial x^i} a_i(w) E,$$

где $a_i(w)$, $\Omega(w)$ - *матрицы размерности* $n \times n$, *которые могут зависеть не только от* w, *но и от производных функций* $w(x, t)$:

б) *элементы матрицы* Ω *есть величины порядка* $0(\tau) + 0(h)$;

в) α_l, β_i, $i = 1, \dots, 8$,- *константы такие, что*

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \qquad \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 1 \qquad \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8 = 1$$
$$\beta_1 + \beta_2 = 1 \qquad \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 = 1 \qquad \beta_6 + \beta_7 + \beta_8 = 1$$
$$0 \leqslant \alpha_j \leqslant 1 \qquad 0 \leqslant \beta_j \leqslant 1 \qquad j = 1, \dots 8,$$

то тогда первое и второе дифференциальные приближения разностной схемы (10) *могут быть представлены в дивергентном виде.*

Теорема 5. *Если постоянные коэффициенты* $\alpha_i\ \beta_i$, *в схеме* (10) *и матрицы* $a_i(w)$, $\Omega(w)$ *удовлетворяют условиям:*

а) $\beta_1(\alpha_3 - \alpha_5) - \beta_2(\alpha_6 - \alpha_8) = 0$;

б) $hDa_1(w) + \tau(\beta_3 - \beta_5) D \dfrac{d\varphi}{dw} - \dfrac{h}{2}(\alpha_1 - \alpha_2) \dfrac{d\varphi}{dw} + \Omega(w) = \beta_9 (D)E;$

в) $\epsilon = \dfrac{h^2}{2\tau} [\beta_1(\alpha_3 - \alpha_5) - \beta_2(\alpha_6 - \alpha_8)] - \dfrac{\tau}{2}(\beta_1 - \beta_2) D^2 + \beta_9 > 0$

то центр конечно-разностной ударной волны для схемы (10) *существует и единствен.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Neumann J.R., Richtmyer R.* //J. Appl. Phys. 1950. Vol. 21, N 2. P. 232.
2. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1967.
3. *Яненко Н.Н., Анучина Н.Н., Петренко В.Е., Шокин Ю.И.* // Числ. методы механики сплош. среды. 1970. Т. 1,№ 1. С. 40.
4. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1968.
5. *Ивандаев А.И.* // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1975. Т. 15, № 2. С. 523.