О КОРРЕКТНОСТИ ПЕРВЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ*

1. Пусть $\Lambda(t, x, \tau, h, T)$ есть разностный оператор, аппроксимирующий дифференциальный оператор $\mathcal{L}(t, x, \partial/\partial t, \partial/\partial x)$. Здесь x - точка вещественного s-мерного пространства R_s; $\partial/\partial x := \mathcal{L}(\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_s)$; $T^1 = (T_1, \ldots, T_s)$, $T = (T_0, T^1)$; T_0 - оператор сдвига по t; T_j - оператор сдвига по x_j, τ, h - сеточные параметры; $h = (h_1, \ldots, h_s)$.

Имеет место операторное представление:

$T_0 = e^{\tau\, \partial/\partial t}$, $T_j = e^{h_j\, \partial/\partial x_j}$, $j=1,\ldots s$

Разлагая оператор $\Lambda(t, x, \tau, h, T) = \Lambda(t, x, \tau, h, e^{\tau\, \partial/\partial t}, e^{h\, \partial/\partial x})$ в ряд по параметрам τ, h, получим

$$\Lambda(t, x, \tau, h, T) = \mathcal{L}(t, x, \tau, h, \partial/\partial t, \partial/\partial x) + R,$$

$$\mathcal{L}(t, x, \tau, h, \partial/\partial t, \partial/\partial x) = \mathcal{L}(t, x, h, \partial/\partial t, \partial/\partial x) + \tau^{\alpha} h^{\beta} P_{\alpha\beta}(t, x, \partial/\partial t, \partial/\partial x),$$

$$R = \tau^{\gamma} h^{\delta} P_{\gamma\delta}(t, x, \partial/\partial t, \partial/\partial x).$$

Суммирование проводится по повторяющемуся индексу, $\tau^{\alpha} h^{\beta} P_{\alpha\beta}(t, x, \partial/\partial t, \partial/\partial x)$ - первые члены разложения (наименьшие по степеням τ и h).

Оператор $\mathcal{L}(t, x, \tau, h,, \partial/\partial t, \partial/\partial x)$ будем называть первым дифференциальным приближением разностного оператора $\Lambda(t, x, \tau, h, T)$, а уравнение $\mathcal{L}(t, x, \tau, h,, \partial/\partial t, \partial/\partial x)\, u = 0$ - первым дифференциальным приближением разностного уравнения $\Lambda(t, x, \tau, h, T)\, u=0$.

2. Рассмотрим задачу Коши для гиперболической системы уравнений первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{S} A_k(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_k}\ , \tag{1}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \tag{2}$$

где $u = u(x, t)$ – вектор-функция с m компонентами; $x = (x_1, \ldots, x_s)$ – точка вещественного s-мерного пространства R_s; $A_k(x, t)$ – вещественные $m \times m$ – матрицы.

Аппроксимируем систему (1) разностной схемой

$$u^{n+1}(x) = \sum_{\alpha} B_{\alpha} u^n(x + \tau\lambda_{\alpha}. \tag{3}$$

Для аппроксимации должны выполняться условия совместности

$$\sum_{\alpha} B_{\alpha} = I\,, \qquad \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^{k} B_{\alpha} = A_k\,, \quad k = 1, \ldots, s. \tag{4}$$

Здесь I – единичная матрица; B_{α} - $m \times m$ – вещественные матрицы; $\lambda_{\alpha} = (\lambda_{\alpha}^{1}, \ldots, \lambda_{\alpha}^{s})$ – вектора смещения.

Первое дифференциальное приближение разностной схемы (3) имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k,l=1}^{s} C_{kl} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{k=1}^{s} D_k \frac{\partial u}{\partial x_k},$$

$$C_{kl} = \frac{\tau}{2}\Big[\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^{k} \lambda_{\alpha}^{l} B_{\alpha} - A_k A_l\Big], \tag{5}$$

$$D_k = A_k - \frac{\tau}{2}\left[\frac{\partial A_k}{\partial t} + \sum_{l=1}^{s} A_l \frac{\partial A_k}{\partial x_l}\right].$$

Здесь и в дальнейшем для гиперболических систем первое дифференциальное приближение рассматривается на решении.

Т е о р е м а 1. *В случае постоянных коэффициентов задача Коши для первого дифференциального приближения (5) разностной схемы (3), коэффициенты которой являются симметрическими положительно определенными матрицами, поставлена корректно.*

---

*Докл. АН СССР, 1968. Т. 182, №4. С. 776-778. (Соавтор Ю.И. Шокин.)

Корректность понимается в смысле И.Г. Петровского [1]. Заметим, что схема устойчива ввиду критерия К.О. Фридрихса [2].

Разностная схема (3) называется простой [3], если число векторов смещения равно числу независимых переменных.

Лемма. Если матрицы A_k - симметрические, то коэффициенты простой схемы – симметрические матрицы.

3. Аппроксимируем систему

$$\partial u/\partial t = A(x,\ t)\ \partial u/\partial x$$

простой схемой

$$u^{n+1}(x) = \sum_{\alpha=1}^{2} B_\alpha u^n(x+\tau\lambda_\alpha)$$

A (x, t) - вещественная симметрическая m x m -матрица. Ее первое дифференциальное приближение

$$\partial u/\partial t = C\partial^2 u/\partial x^2 + D\ \partial u/\partial x, \qquad (8)$$

$$C = \frac{\tau}{2}\left[\sum_{\alpha=1}^{2}\lambda_\alpha^2 B_\alpha - A^2\right],\ D = A - \frac{\tau}{2}\left[\frac{\partial A}{\partial t} + A\frac{\partial A}{\partial x}\right].$$

Т е о р е м а 2. *Для того чтобы простая разностная схема (7) в случае постоянных коэффициентов была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы задача Коши для ее первого дифференциального приближения была корректна.*

Т е о р е м а 3. *В случае переменных коэффициентов, если матрица A липшиц-непрерывна, то корректность первого дифференциального приближения (8) простой схемы (7) является достаточным условием устойчивости схемы.*

Трехточечную разностную схему, аппроксимирующую систему (6) ,

$$u^{n+1}(x) = \sum_{\alpha=-1}^{2} B_\alpha u^n(x+\alpha h)\ ,$$

$$\sum_{\alpha=-1}^{1} B_\alpha = I\ , \qquad \sum_{\alpha=-1}^{1}\alpha B_\alpha = rA\ , \quad r = \tau/h, \qquad (9)$$

назовем мажорантной [4, 5], если

$$B_1 = rA^+, \qquad B_{-1} = rA^-, \qquad A = A^+ + A^-, \qquad A^+ \geqslant 0,\ A^- \leqslant 0.$$

Первое дифференциальное приближение схемы (9) имеет вид (8), где

$C=(h^2/2\tau)(I - B_0)B_0$.

Т е о р е м а 4. *Для устойчивости мажорантной схемы в случае постоянных коэффициентов необходимо и достаточно, чтобы ее первое дифференциальное приближение было корректно.*

Т е о р е м а 5. *В случае переменных коэффициентов, если матрица A липшиц-непрерывна, то корректность первого дифференциального приближения мажорантной схемы является достаточным условием устойчивости схемы.*

Т е о р е м а 6. *Для того чтобы устойчивая трехточечная схема (9) в случае постоянных коэффициентов была мажорантной, необходимо и достаточно, чтобы ее коэффициенты были попарно перестановочные симметрические матрицы и $B_1B_{-1} = 0$. Заметим, что в случае необходимости устойчивость не обязательна.*

С л е д с т в и е . Если коэффициенты трехточечной разностной схемы (9) в случае постоянных коэффициентов попарно перестановочные симметрические матрицы и $B_1 B_{-1} = 0$, то для устойчивости схемы необходимо и достаточно, чтобы ее первое дифференциальное приближение было корректно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петровский И.Г. // Бюл. МГУ. Секция А. 1938. Т. 1, вып. 7, № 1.
2. Friedrichs K.O // Commun. Pure and Appl. Math. 1954. Vol. 7., N 2. P. 345.
3. Hahn S.C // Ibid. 1958. Vol. 9, N 2. P. 243.

4. Яненко Н.Н. // Тр IV Всесоюз. мат. съезда. Л., 1964. Т. 2.
5. АнучинаНЛ. // Тр. МИАН СССР. 1966. Т. 74, № 5.