ОБ ОДНОМ РАЗНОСТНОМ МЕТОДЕ СЧЕТА МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ*

1. В работе [1] был рассмотрен метод приведения многомерных разностных схем к двумерным в применении к явным схемам, аппроксимирующим гиперболические системы (такой метод в дальнейшем будем называть методом расщепления). В настоящей заметке мы покажем на примере уравнения теплопроводности, что метод расщепления может быть применен для получения простых устойчивых и сходящихся неявных схем.

Рассмотрим многомерное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu = a^2 \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^t}, \tag{1}$$

для которого в прямоугольной области II, определяемой неравенствами

$$0 \leqslant x_i \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant t \leqslant \mathrm{T}, \qquad i = 1, \dots m, \tag{2}$$

может быть поставлена смешанная задача

$$u(x_1, \dots x_m, 0) = \varphi(x_1, \dots x_m); \tag{3}$$

$$u(x_1, \dots x_{s-1}, 0, x_{s+1}, \dots x_m) = f_s(x_1, \dots x_{s-1}, x_{s+1}, x_m, t) \tag{4}$$

$$u(x_1, \dots x_{s-1}, 1, x_{s+1}, \dots x_m) = g_s(x_1, \dots x_{s-1}, x_{s+1}, x_m, t).$$

Задаче (1) - (4) может быть поставлена в соответствие следующая разностная схема:

$$\frac{u_{i_1}^{n+1} \dots i_m - u_{i_1}^{n} \dots_{i_m}}{\tau} = \Lambda \left[\frac{1-\alpha}{2} u_{i_1}^{n+1} - \frac{1+\alpha}{2} u_{i_1}^{n} \dots_{i_m} \right],$$

$$\Lambda u_{i_1 \dots i_m}^{n} = \sum_{s=1}^{m} \Lambda_s u_{i_1 \dots i_m}^{n}, \tag{1$'$}$$

$$\Lambda_s u_{i_1 \dots i_m}^{n} = \frac{u_{i_1 \dots i_{s-1} \dots i_m}^{n} - 2u_{i_1 \dots i_m}^{n} + u_{i_1 \dots i_{s+1} \dots i_m}^{n}}{h_s^2};$$

$$u_{i_1 \dots i_m}^{0} = \varphi_{i_1 \dots i_m}; \tag{3$'$}$$

$$u_{i_1 \dots i_{s-1} 0 i_{s+1} i_1 \dots i_m}^{n} = f_{s i_1 \dots i_{s-1} i_{s+1} \dots i_m}^{n}, \tag{4$'$}$$

$$u_{i_1 \dots i_{s-1}, N_s + 1, i_{s+1} \dots i_m}^{n} = g_{s i_1 \dots i_{s-1} \dots i_m}^{n},$$

где положено

$$u_{i_1 \dots i_m}^{n} = (x_1, x_2, \dots, x_m, t), \tag{5}$$

$$x_s = i_s h_s,\ t = n\tau,\ i_s = 0, 1, (N_s + 1) h_s = 1.$$

При $\alpha = 1$ получаем явную схему с временным интегрированием по Эйлеру, при $\alpha = -1, 0$ получаем неявные схемы с временным интегрированием по Эйлеру с опережением и по трапеции соответственно.

Покажем, что схема (1') - (4') аппроксимируется схемой

$$\frac{u_{i_1}^{n+s/m} \dots i_m - u_{i_1 \dots i_m}^{n+(s-1)/m}}{\tau} = \Lambda_s \left[\frac{1-\alpha}{2} u_{i_1 \dots i_m}^{n+s/m} + \frac{1+\alpha}{2} u_{i_1 \dots i_m}^{n+(s-1)/m} \right]; \tag{1$''$}$$

$$u_{i_1 \dots i_m}^{0} = \varphi_{i_1 \dots i_m}; \tag{3$''$}$$

$$u_{i_1 \dots i_{s-1} 0 i_{s+1} \dots i_m}^{n+s/m} = f_{s i_1 \dots i_{s-1} i_{s+1} \dots i_m}^{n}, \tag{4$''$}$$

$$u_{i_1 \dots i_{s-1},\ Ns+1 \cdots i_m}^{n+s/m}, = g_{s i_1 \dots i_{s+1} \dots i_m}^{n}.$$

Ввиду однородности схемы (1') - (4'), (1") - (4") в дальнейшем обозначаем

$$u_{i_1 \dots i_m}^{n+s/m} = u^{s/m},\ s = 0, 1, \dots, m. \tag{6}$$

Уравнения (1'),(1") примут вид

$$Au^1 - Bu^0 = 0 \tag{7}$$

Доклады АН СССР. 1959.т.125, № 6.с.1207-1210.

соответственно

$$A_s u^{s/m} - B_s u^{(s-1)/m} = 0, \ s = 1,\ldots, m, \tag{8}$$

где

$$A_s = E + \tau a_s,\ B_s = E + \tau b_s,\ A = E + \tau a,\ B = E + \tau b; \tag{9}$$

$$a = \sum_{s=1}^{m} a_s,\ b = \sum_{s=1}^{m} b_s,\ a_s = \frac{\alpha - 1}{2}\Lambda_s,\ b_s = \frac{\alpha+1}{2}\Lambda_s. \tag{10}$$

Нетрудно видеть, что операторы Λ_s, A_s, B_s перестановочны:

$$[\Lambda_s, \Lambda_{s'}] = [A_S A_{s'}] = [B_s B_{S'}] = [A_S B_S'] = 0,\ s, s' = 1,\ldots,m. \tag{11}$$

Умножая первое равенство (8) на A_2, второе на B_1 и пользуясь перестановочностью операторов A_s, $B_{s'}$, имеем $A_1A_2u^{2/m} - B_1B_2u^0 = 0$. Продолжая аналогично дальше, получаем

$$A_1\ldots A_m u^1 - B_1\ldots B_m u^0 = 0. \tag{12}$$

Пользуясь представлением (9), (10), уравнение (12) преобразуем к виду:

$$Au^1 - Bu^0 + \tau^2 [\Sigma\, a_{s_1} a_{s_2}\ u^1 - \Sigma b_{s_1} b_{s_2} u^0] + \tau^3 [\Sigma\, a_{s_1}\ a_{s_2} a_{s_3} u^1 -$$

$$- \Sigma b_{s_1} b_{s_2} b_{s_3} u^0] + \ldots \tau^n (a_1\ldots a_m) u^1 - (b_1\ldots b_m) u^0] = 0 \tag{13}$$

Из (13) следует, что схема (1$''$) и эквивалентная ей схема (13) аппроксимирует уравнение (1) с той же точностью, что и схема (1$'$). Докажем устойчивость схемы (l"). Операторы A_s, B_s с учетом краевых условий (4) имеют собственные функции

$$v_{ps} = \sin p_s\text{-}\ \pi x_s,\ p_s = 1,\ldots,N_s. \tag{14}$$

Операторы $A_1,\ldots, A_m$, $B_1,\ldots, B_m$ имеют собственные функции

$$v_{p_1 \cdots p_m} = v_{p_1} v_{p_2} \ldots v_{p_m} = \prod_{s=1}^{m} \sin p_s \pi x_s \tag{15}$$

Собственными значениями операторов $A_1 A_2 \ldots A_m$, $B_1 B_2 \ldots B_m$ будут

$$\lambda_{p_1 \cdots p_m} = \prod_{s=1}^{m} [\ 1 + 2\, r_s\, (1 - \alpha) \sin p_s \pi h_s\ ] \tag{16}$$

соответственно

$$\mu_{p_1 \cdots p_m} = \prod_{s=1}^{m} [\ 1 + 2\, r_s\, (1 + \alpha) \sin^2 p_s \pi h_s\ ], \tag{17}$$

где $r_s = \tau a^2 / h^2_s$. Полагая

$$u^0 = a_0 v_{p_1 \cdots p_m},\ u^1 = a_1 v_{p_1 \cdots p_m} \tag{18}$$

и подставляя (18) в (12), получаем

$$\rho_{p_1 \cdots p_m} = a_1/a_0 = \mu_{p_1 \cdots p_m} / \lambda_{p_1 \cdots p_m}, \tag{19}$$

Нетрудно видеть, что при любых r, h_s, p_s, и $-1 \leqslant$ а $\leqslant 0$

$$|\rho_{p_1 \cdots p_m}| \leqslant 1 \tag{20}$$

Таким образом, схема (l") устойчива.

Учитывая, что при фиксированном r произвольных $h_1,\ldots, h_m$ и $-1 \leqslant \alpha \leqslant 0$

$$|\lambda_{p_1 \cdots p_m}| > 1, \tag{21}$$

видим, что решение задачи (l") - (4") сходится в среднем к решению задачи (I) - (4) с порядком интегральной точности 0(τ) (см. [2]).

2. Установленный результат остается в силе для операторов L, Λ (расщепляющиеся операторы), удовлетворяющих условиям:

1). Операторы L, Λ имеют вид

$$L = \sum_{s=1}^{m} L_s,\quad L_s = \sum_{\alpha=0}^{p_s} a_{s\alpha} D_s^{\alpha},\ D_s = \partial/\partial x_s,\ s=1,\ldots m, \tag{22}$$

$$\Lambda = \sum_{s=1}^{m} \Lambda_s\ , \ \ \Lambda_s = \sum_{\alpha=-m_s}^{n_s} b_{s\alpha} T_s^{\alpha}\ , \tag{23}$$

где m_s, n_s - целые, T_s — оператор сдвига

$$T_s u\ (x_1,...,x_m) = u(x_1, ...,x_s + h_s, ...,x_m), \tag{24}$$

Оператор Λ аппроксимирует L с точностью 0 $(\tau^{1+\alpha})$, $\alpha > 0$.

2). Схема

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \frac{1-\alpha}{2} \Lambda_s u^{n+1} \frac{1+\alpha}{2} \Lambda_s u^n \tag{25}$$

или эквивалентная ей схема

$$A_s u^{n+1} - B_s u^n = 0 \tag{26}$$

$$A_s = E + \tau a_s,\ \ B_s = E + \tau b_s,\ a_s = \frac{\alpha - 1}{2} \Lambda_s\ ,\ \ b_s = \frac{1+\alpha}{2} \Lambda_s \tag{27}$$

устойчива.

3) Собственные значения λ_{p_s} операторов A_s ограничены по модулю снизу

$$|\lambda_{p_s}| > k > 0,\ p_s = 1,...,N_s. \tag{28}$$

При удовлетворении этих условий схема

$$A_s u^{s/m} - \mathrm{B}_s u^{(s-1)/m} = 0 \tag{29}$$

будет устойчивой и сходящейся в среднем с интегральной точностью $O(\tau^s)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Багриновский К.А., Годунов С.К.* // ДАН СССР. 1957. Т. 115, № 3. С. 431.
2. *Douglas J.* // J. Soc. Ind. Appl. Math. 1956. Vol. 4, N 1.