О НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЯХ ПЕРЕМЕННОГО ТИПА*

1. Для описания нелинейной неустойчивости и автоколебательных движений сплошной среды в последнее время предложены математические модели, основу которых составляют уравнения в частных производных переменного типа.

В работе [1] проведены численные эксперименты и дан качественный анализ системы уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\nu(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right], \qquad \frac{\partial v}{\partial t}=-a^2\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \text{a} = \text{const}, \tag{1}$$

которая представляет собой упрощенную модель баротропного газа с коэффициентом искусственной вязкости $\nu(u)$, зависящим от скорости. Решением системы (1) являются автоколебания, возникающие в областях пространства скоростей u, где коэффициент $\nu(u)$ меняет знак,

2. Система (1) неинвариантна относительно преобразования Галилея. Очевидно, что содержательные феноменологические модели механики сплошной среды должны быть инвариантны относительно основной группы преобразований, В связи с этим в работе [2] предложена математическая модель, являющаяся аналогом одномерного уравнения Бюргерса, но с коэффициентом вязкости, зависящим от градиента скорости

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\nu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right]. \tag{2}$$

Здесь коэффициент вязкости ν - асимптотически положительная функция $(\partial u/\partial x)$, принимающая отрицательные значения в некоторой конечной области изменения $(\partial u/\partial x)$. Рассмотрим сначала уравнение (2) без конвективного члена $u\,(\partial u/\partial x)$ с начальным условием $u(x, 0) = u_0(x)$, $0 < x < 1$ и периодическими граничными условиями. Если

$$\nu = 1+\nu_1\frac{\partial u}{\partial x}+\nu_2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2, \qquad \nu_2 > 0, \qquad \nu_1^2 - 4\,\nu_2 = \delta > 0, \tag{3}$$

то имеет место следующая априорная оценка решения:

$$\int(\partial u/\partial x)^2\,dx \leqslant C(\nu_1,\nu_2,u_0). \tag{4}$$

Если $\nu = 1 - \nu_1\,(\partial u/\partial x)^{2m} + \nu_2(\partial u/\partial x)^{2n}$, $m < n$, $\nu_1, \nu_2 > 0$, $\nu^2{}_1 - 4\nu_2 > 0$, то для достаточно больших m, n имеет место следующая априорная оценка:

$$\int\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^h dx \leqslant C(m,\ n,\ \nu_1,\ \nu_2,\ k,\ u_0\ ).$$

Для полного уравнения (2) с начальными и граничными условиями $u(x, 0) = u_0(x)$, $u(0, t) = u(l, t) = 0$

$$\int u_t^2\,dxdt+\int u_x^{4dx} \leqslant C(\nu_1,\ \nu_2,\ u_0,\ t).$$

Для задачи (2), (3) установлен разностный аналог оценки

$$\int_0^t\int_0^1 u_t^2\,dxdt+\int_0^1 u_x^4\,dx \leqslant \text{const},$$

гарантирующий слабую компактность в соответствующих пространствах решений разностных уравнений.

Оценим теперь отклонение решения уравнения (2) с коэффициентом вязкости (3) от решения уравнения Бюргерса, Начально-краевые условия выберем в виде $u\,|_{t=0} = u(x)$, $u(1, t) = u(0, t)$; $0 \leqslant t \leqslant T$. Предполагаем, что ν_1, ν_2 - малые параметры и что коэффициент $\nu(p) - \nu_0 + \nu_1 p + \nu_2 p^2$ положителен, а коэффициент $\nu'(p) = \nu_0 + 2\nu_1 p + 3\nu_2 p^2$ при второй производной в уравнении (2) знакопеременен. Из этих требований вытекают следующие условия на коэффициенты:

$$\nu_1 > 0, \quad \nu_1^2 - 4\nu_0\nu_2 < 0, \quad \nu_1^2 - 3\nu_0\nu_2 > 0. \tag{5}$$

Из предположения малости ν_1, ν_2 следует, что для выполнения соотношения (5) при фиксированном ν_0 и при изменяющихся малых ν_1, ν_2 достаточно, чтобы $\nu_2 = k\nu^2{}_1$ с некоторой фиксированной постоянной k.

*Теория кубатурных формул и вычислительной математики. Новосибирск: Наука, 1980. С. 48-54.

Итак, рассматривается уравнение

$$u_t + uu_x = \frac{\partial}{\partial x}\left[(v_0 + v_1 u_x + k v_1^2 u_x^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right]$$

с условиями на коэффициенты

$1 - 4kv_0 < 0, \quad 1 - 3kv_0 > 0,$

и константа k выбирается по v_0.

Пусть $u^0(x, t)$ - решение уравнения Бюргерса

$u_t + uu_x = vu_{xx}$

с указанными выше начально-краевыми условиями. Запишем решение задачи в виде $u(x, t) = u^0(x, t) + R(x, t)$. Тогда справедлива оценка

$||R||^2 \leqslant k(Tu^0)v_1.$

3. В работе [3] рассмотрено уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2\mu u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right], \tag{6}$$

где $\omega(\xi)$ - гладкая функция, для которой $\omega'(\xi) \geqslant \delta > 0$, $|\xi| \geqslant N > 0$, и $\omega'(\xi)$ может принимать отрицательные значения для $|\xi| < N$

В случае начальных и граничных условий $u(x, 0) = u_0(x)$, $u(0, t) = u(1, t) = 0$ априорная оценка в норме C(0,1) имеет следующий вид:

$$||u||_{C(0,1)} + ||u_x||_{C(0,1)} \leqslant C(N, u_0, t, K(T)), \tag{7}$$

где $K(T)$ - $\sup\limits_{x,\ t} |u(x, t)|$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Если $\mu = 0$, то величина C в (7) не зависит от K.

В работе [3] получены также теоремы существования обобщенного и гладкого решений для задач

$$\left(1 + \varepsilon\frac{\partial^4}{\partial x^4}\right)\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right);$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2\mu u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \varepsilon\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$$

с условиями $u(x, 0) = u_0(x)$, $u(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = u(1, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0$ и со знакопеременным коэффициентом $\omega'(\xi)$.

Для задачи (6) в работе [4] установлена более сильная оценка типа (7) с константой C в правой части, не зависящей от $K(T)$, и оценка

$$\int\left(\omega'\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)dxdt + \int u_t^2 dxdt \leqslant C(N, u_0, t)$$

Для гладких решений уравнения (6) с краевыми условиями вида

$$\alpha u_x - \varphi(u)\big|_{x=0} = \beta u_x - \psi(u)\big|_{x=1} = 0$$

получена оценка $|u_x|$ через $||u|$ и sup $|||u_0|| + |u'_0|$, а также априорная оценка $|u|$ для третьей краевой задачи при дополнительных условиях на рост $\varphi(u)$, $\psi(u)$, $\omega(u_x)$.

Для обобщенных решений задачи (6), (8) получена оценка в классе обобщенных решений, допускающих аппроксимацию в определенном смысле гладкими функциями.

Если коэффициент $\omega'(\xi) \geqslant 0$ вырождается, то методом конечных разностей для первой и третьей краевых задач при дополнительных ограничениях на рост функций $\varphi(u)$, $\psi(u)$, $\omega(u_x)$ доказана теорема существования решения задачи (6), (8) из класса функций, для которых конечно выражение

$$\int_0^t\int_0^1 [u_t^2 + (\omega'(u_x)u_{xx})^2]dxdt + \int_0^1 \omega(u_x)dx + \sup|u|.$$

В случае знакопеременной величины $\omega'(u_x)$ показана слабая компактность приближенных решений в соответствующих пространствах.

Методом Галеркина доказана теорема существования и единственности обобщенного решения рассматриваемой задачи из класса $W^{1}{}_{2+}{}^{1}{}_{2v}$ в случае вырождающегося коэффициента $\omega'(\xi) \geqslant 0$ $(-C_0 + C_1|\xi$

$|^{2\nu} \leqslant \omega'(\xi) \leqslant C_2\ |\xi\ |^{2\nu} + C_3)$ и слабая компактность приближенных решений в случае знакопеременной функции $\omega'(\xi)$.

В [6] получены априорные оценки $|u_x|$ через $|u|$ и $||u_0||_{C1}$ для квазилинейных уравнений с одной пространственной переменной

$$u_t = a(x,u,u_x)\ u_{xx} + b(x,u,u_x) + f\,(x,u,\ u_x,u_{xx}),$$

где $a \geqslant a_0 > 0$, f - финитная функция, а также оценка $|\ u_x|$ через $|u|$ и $||u_0||_{C1}$ при $f = f_1\ (t,\ x,\ u,\ u_x)u_{xx} + f_2\ (t,\ x,\ u,\ u_x,\ u_{xx})$, где $f_1\ f_2$ финиты по $u_x,\ u_{xx}$.

4. Следуя работе [4], рассмотрим систему уравнений типа Навье-Стокса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x}\left[\nu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right]; \qquad \mathrm{div}u = 0$$

где $x\ \varepsilon\ \Omega \subset R^3$, Ω - ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, $u = (u_1,\ u_2,\ u_3)$, $0 \leqslant i < \infty$,

$$\nu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \nu_0 + \nu_1\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{2m} + \nu_2\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{4m}, \qquad \nu 2 > 0,\ \ m \geqslant \frac{1}{2}$$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| = \left(\sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2\right)^{1/2}.$$

Условие $\nu_2 > 0$ означает, что рассматриваются только асимптотически положительные полиномы $\nu\ (p)$.

Для уравнения (9) рассмотрим следующие начально-краевые условия:

$$u|_{\partial\Omega} = 0;\ \ u|_{t=o} = u_o(x) \tag{10}$$

Пусть V — замыкание множества $\vartheta = \{v\ |v \in C_0^\infty(\Omega),\ \mathrm{div}v = 0\}$ в норме $W^1{}_{2+4m}(\Omega)$, где $W^1{}_{4m+2}(\Omega)$ – пространство Соболева. Пусть ω_j $(j = 1,2,\ \ldots,n,\ \ldots)$ - некоторая полная в банаховом пространстве V система функций. Будем искать приближенное решение задачи (9) - (10) с помощью метода Галеркина, т. е, в виде

$$u^n\,(t,\,x) = \sum_{i=1}^{n} C_i^n(t)\omega_i(x),$$

где коэффициенты $C^n{}_i\ (t)$ находятся из уравнения

$$(u^n_t,\ \omega_j) + ((u^n,\ \nabla)\ u^n,\ \omega_j) + \sum_{i=1}^{3}\left(\nu\left(\frac{\partial u^n}{\partial x}\right)\frac{\partial u^n}{\partial x_i},\frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}\right) = 0, \qquad j = 1,\ 2,\ \ldots n, \tag{11}$$

а (,) - скалярное произведение в $L_2(\Omega)$. Начальные условия для системы (11) найдем из соотношений $C^n{}_i(0) = \alpha^n{}_i$, где $\alpha^n{}_i$ определяются из условий

$$u^n\,(0,\,x) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^n\omega_i(x), \qquad u^n\,(0,x) \to u_0\,(x) \tag{12}$$

при $n \to \infty$ в норме пространства V. Справедлива следующая

Теорема. *Пусть* $u^1\ (t,\ x) = C^1{}_1\ (t)\omega_1\ (x)$ *- первое галеркинское приближение задачи* (9), (10), $\omega_1(x) \in V$, $\int\omega^2{}_1 dx = 1$, $u^1(0,\ x) = \alpha^1{}_1\ \omega_1(x)$. *Обозначим* $|C^1{}_1|^{2m} = y(t)$, $a_0 = 2m\nu_0 \int/\partial\omega_1/\partial x|^2\ dx$, $a_1 = -2m\nu_1 \int/\partial\omega_1/\partial x|^{2m+2}\ dx$, $a_г = -2m\nu_2 \int/\partial\omega_1/\partial x|^{4m+2}\ dx$,

Тогда функция y(t) удовлетворяет уравнению Абеля первого рода

$$\partial y/\partial t = a_1 y^2 + a_2 y^2 + a_2 y^3 \tag{13}$$

и имеют место следующие утверждения:

1) *если* $\nu_0 > 0$, *то нулевое решение асимптотически устойчиво по Ляпунову при* $t \to \infty$; *при* $\nu^2{}_1 - 4\nu_0\,\nu_2 < 0$ *не существует других стационарных решений уравнения* (13); *при* $\nu^2{}_1 - 4\nu_0\,\nu_2 > 0$, $\nu_1 < 0$ *существует еще одно асимптотически устойчивое по Ляпунову при* $t \to \infty$ *положительное решение для некоторых* $\omega_1(x)$;

2) *если* $\nu_0 < 0$, *то для некоторых* $\omega_1(x)$ *существует только одно положительное асимптотически устойчивое решение уравнения* (13).

5. Для выяснения свойств модельного уравнения (2) со знакопеременным коэффициентом вязкости (3) было проведено численное решение этого уравнения конечно-разностным методом [5]. Когда коэффициент вязкости ν отрицателен, то задача стано-

вится некорректной и решение может возрастать. Поскольку ожидалось появление колебаний, связанных с изменением знака коэффициента вязкости, то была выработана схема, которая на решениях уравнения Бюргерса ($v_1 = v_2 = 0$, $v_0 = \mathrm{const} > 0$) давала заведомо монотонный профиль. Была изучена эволюция начального распределения в виде ступеньки. Расчеты позволили установить нестационарные колебания при стационарном осреднением течении, обнаружить свойство перемежаемости, т. е. чередование сильных и слабых осцилляции.

6. Рассмотрим задачу о газовом шаре, находящемся под действием сил гравитации и газокинетического давления. В предположении сферической симметрии исходные

$$\frac{\partial u}{\partial t} = G\frac{M(r)}{r^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} : M(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r')dr'; \; p = p(\rho, \mathrm{T}), \tag{14}$$

где u — радиальная скорость; p - плотность; ρ - давление газа; G - гравитационная постоянная.

В случае политропной зависимости давления газа от плотности p - $C\rho^2$ система уравнений (14) имеет стационарное решение: $\rho(r) = p_0 \sin \pi r/\pi r$ (p_0 - плотность в центре шара, радиус которого равен $R_0 = \sqrt{\pi/2G} \simeq 48{,}5$.

Большой интерес представляет решение системы (14) в случае немонотонной зависимости $p(\rho)$, например типа зависимости Ван-дер-Ваальса, поскольку области, где $\partial p/\partial\rho < 0$, являются неустойчивыми. Численное решение исходной системы уравнений с немонотонной связью между давлением и плотностью показало, что в зависимости от глубины "ямы" на графике $p(\rho)$ получаются существенно различные распределения плотности по радиусу шара: либо происходит разделение шара на две области с заметно различающейся плотностью и резкой границей между этими областями -режим I, либо имеет место непрерывное изменение плотности - режим II [7].

В режиме I плотности газа справа и слева от разрыва находятся в области, где $dp/d\rho < < 0$. Шар делится на две части потому, что область с $dp/d\rho < 0$ неустойчива. С течением времени плотности и радиус шара испытывают колебания, причем колебания плотности во внешней части шара существенно меньше, чем во внутренней,

В режиме II также наблюдаются колебания плотности, совпадающие по порядку величины с колебаниями плотности в режиме I в области, внешней по отношению к разрыву.

Таким образом, немонотонные уравнения состояния типа Ван-дер-Ваальса могут определять гидродинамические автоколебательные процессы. Эти особенности физически связаны с фазовыми переходами и источниками энергии, а математически находят свое выражение в переменности типа исходных уравнений (гиперболический - эллиптический).

7. Интересная система уравнений переменного типа описывает нелинейные альфве-новские волны, распространяющиеся в разреженной анизотропной плазме вдоль магнитного поля [8 - 10]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left[(1 - H^2 - B^2)H - \frac{\partial v}{\partial z}\right] = 0; \qquad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left[(1 - H^2 - B^2)B + \frac{\partial u}{\partial z}\right] = 0 \tag{15}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial z}, \qquad \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial z}.$$

Здесь H, $B(u, v)$ - компоненты магнитного поля (скорости) в плоскости, перпендикулярной основному магнитному полю H_0, направленному по оси z.

Система (15) записана в безразмерном виде. Все коэффициенты, характеризующие среду, устранены с помощью преобразования масштабов. После линеаризации этой системы относительно малых

$$\omega_k = k^2/2 + i\,\gamma_k, \quad \gamma_k = k\,(1 - k^2/4)^{1/2}, \tag{16}$$

где k — волновое число малых возмущений; γk - инкремент их роста.

Из формулы (16) следует, что возмущения с волновыми числами $k < 2$ неустойчивы. Гармоники с волновыми числами $k > 2$ устойчивы, что связано с эффектом "магнитной вязкости" (математически - с членами $\partial u/\partial z$, $\partial u/\partial z$ в первых двух уравнениях системы (15)). В нелинейном случае рост амплитуды волн ограничивается членами $(H^2 + B^2)H, (H^2 + B^2)B$.

Система уравнений (15) допускает частное решение следующего вида:

$H(z,t) = A\,(t)\,sin\,(kz + \varphi\,(t)$;

$B(z,t) = A(t)\cos(kz + \varphi\,(t)$,

где амплитуда волны $A(t)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$d^2A/dt^2 - \gamma_k^2\,A + k^2A^3 - CA^{-3} = 0, \quad C = \mathrm{const}$, допускающему несложный качественный анализ и запись решения в квадратурах. Амплитуда волны испытывает с течением времени автоколебания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Daly J.B.* The stability properties of a coupled pair of non-linear partial difference equations // Math. Comput. 1963. Vol. 84. P. 346-360.
2. *Яренко Н.Н., Новиков В.Л.* Об одной модели жидкости со знакопеременным коэффициентом вязкости // Числ. методы механики сплош. среды, 1973. Т. 4, № 2. С. 142-147,
3. *Зеленяк Т.И., Новиков В.А., Яненко Н.Н.* О свойствах решения нелинейных уравнений переменного типа // Там же. 1974. Т. 5, № 4. С. 35-47.
4. *Зеленяк Т.И.* Об одном уравнении со знакопеременным коэффициеном диффузии // Математические проблемы химии. Новосибирск: Наука, 1975. Ч. 1.
5. *Berezin Yu.A., Dudnikova G.I., Novikov V.A., Yanenko N.N.* Analytical and numerical studies of equation with sign changing viscosity coefficient // Lect. Notes Math. 1976. N 594. P. 30 -38.
6. *Бглоносов В.С., Зеленяк Т.И.* Нелокальные проблемы в теории квазилинейных параболических уравнений. Новосибирск: Наука, 1975. 155 с.
7. *Яненко Н.Н., Березин Ю.А., Криволуцкий В.С.* Гравитирующий газовый шар // Числ. методы механики сплош. среды. 1978. Т. 9. № 4. С. 139- 145.
8. *Березин Ю.А., Сагдеев Р.З.* Одномерная нелинейная модель неустойчивости анизотропной плаз мы // ДАН СССР. 1 969. Т. 184, № 3. С. 570-573.
9. *Березин Ю.А.* Нелинейные движения в анизотропной плазме // Ж ЗТФ. 1971. Т. 61, рып. 5 (11). С 1877-1881.
10. *Berezin Yu.A., Vshivkov V.A.* On the firehose instability of alfven waves // J. Comput. Phys. 1976. Vol. 20. N l. P. 81-96.