

МЕТРИКИ КЛАССА 2*

В заметке [1] нами были даны необходимые и достаточные условия того, что данная метрика $ds^2 = g_{ij} \omega^i \omega^j$ ($i, j = 1, \dots, m$, ω^i - линейные формы от дифференциалов du^1, \dots, du^m) имеет класс, равный q , для случая, когда тип метрики $t \geq 3$.

Общая теория применима полностью и к случаю $q = 2$. Таким образом, подлежат исследованию метрики типа $t \leq 2$. В случае метрик класса 2 можно сформулировать следующую теорему

Теорема 1. Для того чтобы метрика

$$ds^2 = g_{ij} \omega^i \omega^j, \quad i, j = 1, \dots, m$$

типа $t \geq 2$ имела класс ≤ 2 , необходимо и достаточно, чтобы существовала система форм $\omega_i^{m+s} = \psi_i^s = \lambda_{ij}^s \omega^j$, $s = 1, 2, i = 1, \dots, m$, удовлетворяющая условиям

$$\sum_{s=1}^2 [\psi_i^s \psi_j^s] = \Omega_{ij} = R_{ij, kl} [\omega^k \omega^l]; \quad (1)$$

$$\left[\begin{array}{c} \Delta^1 \\ (i \psi_j^2) \end{array} \right] = [\Delta^2 (i \psi_j^1)] = 0; \quad \left[\begin{array}{c} \Delta^2 \\ (i \psi_j^1) \end{array} \right] = [\Delta^2 (i \psi_j^2)] = 0, \quad (2)$$

где

$$\Delta_i^s = (\psi_i^s)' - [\omega_i^j \psi_j^s], \quad s = 1, 2, \quad i, j = 1, \dots, m. \quad (3)$$

Условия (1) суть условия Гаусса, условия (2) эквивалентны условиям Кодацци - Риччи.

В дальнейшем рассматриваются метрики типа $t = 2$ и ранга > 4 .

Согласно теореме 2 заметки [1], в случае $t \geq 2$ ранг и тип метрики совпадают с соответствующими инвариантами поверхности, реализующей метрику. Как известно [2], поверхности типа 2 суть или поверхности ранга $r = 4, 5$ или, в случае $r > 5$, подповерхности гиперповерхности ранга 2.

Это означает, что формы $\omega_i^{m+s} = \psi_i^s$ должны удовлетворять альтернативе:

- 1) ранг $\{\psi_i^s\} > 5$, но зато имеется комбинация $\psi_i = \lambda \psi_i^1 + \mu \psi_i^2$ ранга 2;
- 2) ранг $\{\psi_i^s\} = 5$ (случай $r = 4$ исключается из рассмотрения).

В случае 1) можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 2. Если $t = 2$ и $r > 5$, то система уравнений

$$[\phi_{\alpha\beta} \phi] = 0,$$

где

$$\phi_{\alpha\beta} = [\Omega_{(\alpha_1 \beta_1} \Omega_{\alpha_2 \beta_2)}]$$

и симметрирование производится по $(\alpha_1 \alpha_2)$, $(\beta_1 \beta_2)$ в отдельности, ϕ - линейная форма от $\omega^1, \dots, \omega^m$, имеет два и только два линейно независимых решения ϕ_1, ϕ_2 .

Это условие проверяется, а формы ϕ_1, ϕ_2 находятся с помощью операций линейной алгебры.

Пусть $I_1 \dots I_m$ - репер, в котором

$$\{\omega^1, \omega^2\} \in \{\phi_1, \phi_2\},$$

где значок \in означает, что формы ω^1, ω^2 разлагаются по формам ϕ^1, ϕ^2 и обратно.

Репер $\{I_1 \dots I_m\}$, формы ω^i, Ω_{ij} и компоненты g_{ij} находятся с помощью линейного алгоритма.

Пусть форма $\psi(d)$ определяется с помощью равенства

$$\psi(d) = \Delta^{-1/2} \begin{vmatrix} \Omega_{31}(d, \delta_1) & \Omega_{31}(d, \delta_1) \\ \Omega_{31}(d, \delta_1) & \Omega_{31}(d, \delta_1) \end{vmatrix}, \quad (7)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} \Omega_{12}(\delta_1, \delta_2) & \Omega_{12}(\delta_2, d) & \Omega_{12}(d, \delta_1) \\ \Omega_{23}(\delta_1, \delta_2) & \Omega_{23}(\delta_2, d) & \Omega_{23}(d, \delta_1) \\ \Omega_{31}(\delta_1, \delta_2) & \Omega_{31}(\delta_2, d) & \Omega_{31}(d, \delta_1) \end{vmatrix}. \quad (8)$$

Образуем $(m+1)$ -мерную метрику

$$ds^2 = g_{ij} \bar{\Omega}^i \bar{\Omega}^j + t^2 \psi^2, \quad (9)$$

где

$$\bar{\Omega}^i = \omega^i + \delta^i dt + t \omega^i. \quad (10)$$

Легко видеть, что метрика ds^2 есть включающая по отношению к метрике ds^2 , т.е. при $t=0$ ds^2 переходит в $ds^2 = g_{ij} \omega^i \omega^j$

Т е о р е м а 3. Для того чтобы метрика $ds^2 = g_{ij} \omega^i \omega^j$ типа $t=2$ и ранга > 5 имела класс ≤ 2 , необходимо и достаточно, чтобы метрика ds^2 , построенная вышеуказанным образом, имела класс ≤ 1 .
Рассмотрим случай 2), когда ранг метрики равен 5.

Рассмотрим систему

$$[\Phi_{ij} \varphi_i] = 0, \quad (11)$$

где i произвольно фиксировано, j меняется от 1 до m ($i = 1, \dots, m$).

Т е о р е м а 4. Если метрика типа $t=2$ имеет ранг 5, то возможны только два случая:

а) система (11) имеет только два линейно независимых решения φ_i^1, φ_i^2 ;

б) система (11) имеет три линейно независимых решения $\varphi_i^1, \varphi_i^2, \varphi_i^3$.

В случае а), согласно теореме 6 [1], необходимое и достаточное условие разрешимости системы

$$\Omega_{ij} = \sum_{s=1}^2 [\psi_i^s \psi_j^s], \quad I, j = 1, \dots, m$$

состоит в том, что система скалярных произведений

$$L_{ij11} = \frac{[\Omega_{ij} \varphi_i^2 \varphi_j^2]}{[\varphi_i^1 \varphi_i^2 \varphi_j^1 \varphi_j^2]}, \quad L_{ij12} = \frac{[\Omega_{ij} \varphi_i^2 \varphi_j^1]}{[\varphi_i^1 \varphi_i^2 \varphi_j^1 \varphi_j^2]},$$

$$L_{ij21} = \frac{[\Omega_{ij} \varphi_i^1 \varphi_j^2]}{[\varphi_i^1 \varphi_i^2 \varphi_j^1 \varphi_j^2]}, \quad L_{ij22} = \frac{[\Omega_{ij} \varphi_i^1 \varphi_j^1]}{[\varphi_i^1 \varphi_i^2 \varphi_j^1 \varphi_j^2]}$$

имеет класс 2.

Формы ψ_i^1, ψ_i^2 могут быть явно выражены через φ_i^1, φ_i^2 [1].

В силу теоремы 1, для того, чтобы метрика имела класс 2, необходимо и достаточно, чтобы определенные таким образом формы φ_i^s удовлетворяли условиям (2).

В случае б) вновь оказывается возможным построить включающую метрику.

Пусть $I_1 \dots I_m$ - репер, в котором

$$\omega^1, \omega^2, \omega^3 \propto \varphi_i^1, \varphi_i^2, \varphi_i^3$$

(i произвольно фиксировано),

$$\psi = \Delta^{-1/2} \begin{vmatrix} \Omega_{41}(d, \delta_1) & \Omega_{41}(d, \delta_1) \\ \Omega_{41}(d, \delta_1) & \Omega_{41}(d, \delta_1) \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \Omega_{12}(\delta_1, \delta_2) & \Omega_{12}(\delta_2, d) & \Omega_{12}(d, \delta_1) \\ \Omega_{24}(\delta_1, \delta_2) & \Omega_{24}(\delta_2, \delta_2) & \Omega_{24}(d, \delta_1) \\ \Omega_{41}(\delta_1, \delta_2) & \Omega_{41}(\delta_2, d) & \Omega_{41}(d, \delta_1) \end{vmatrix},$$

$$ds^2 = g_{ij} \bar{\Omega}^i \bar{\Omega}^j + t^2 \psi^2,$$

где

$$\bar{\Omega}^i = \omega^i + \delta^i dt + t \omega^i.$$

Тогда для того, чтобы метрика $ds^2 = g_{ij} \omega^i \omega^j$ имела класс ≤ 2 , необходимо и достаточно, чтобы ds^2 имела класс ≤ 1 .

Заметим, что мы рассматриваем метрику в репере общего положения, т.е. предполагаем, что все соотношения типа $f \neq 0$, которые могут быть получены в результате преобразования репера выполняются.

ЛИТЕРАТУРА

1. Яненко Н.Н. // ДАН СССР. 1952. Т. 83, № 4.
2. Яненко Н.Н. // Там же. 1949. Т. 64, № 5.