1984 г. июль—август *т. 39, вып. 4(238)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

НИКОЛАЙ НИКОЛАЕВИЧ ЯНЕНКО

(некролог)

16 января 1984 г. скончался Герой Социалистического Труда, лауреат Государственных премий СССР, директор Института теоретической и прикладной механики Сибирского отделения Академии наук СССР, академик Николай Николаевич Яненко. Советская наука потеряла талантливого математика и механика, ученого-коммуниста, крупного организатора науки, разносторонне образованного человека.

Н. Н. Яненко родился в 1921 г. в Новосибирской области в крестьянской семье. В 1939 г. он поступил на физико-математический факультет Томского государственного университета и досрочно с отличием окончил его в 1942 г. С ноября 1942 г. Николай Николаевич — участник Великой Отечественной войны. С оружием в руках он защищал нашу Родину от фашистских захватчиков, за проявленные отвагу и мужество был награжден орденом Красной Звезды и медалями.

В 1946 г. Н. Н. Яненко поступил в аспирантуру НИИ математики и механики МГУ. Здесь он начал свой путь в науку под руководством известного советского геометра и педагога П. К. Рашевского. В 1948 г. Н. Н. Яненко представил кандидатскую, а в 1954 г.— докторскую диссертацию.

В 1948 г. Н. Н. Яненко начал работать над применениями методов математической физики и вычислительной математики к решению важнейших научно-технических задач того времени под руководством А. Н. Тихонова. Это был переломный момент в его научной деятельности. Он — «абстрактный геометр» — начал заниматься решением прикладных задач. Ему пришлось изучать многие разделы механики, физики, вычислительной математики, возможности вычислительной техники, одновременно работая над решением конкретных задач. Вплоть до 1955 г. Николай Николаевич активно занимался и многомерной дифференциальной геометрией. Несмотря на трудности Н. Н. Яненко блестяще справился с этими задачами. За большие заслуги в выполнении ряда научно-технических работ Н. Н. Яненко был награжден двумя орденами Трудового Красного Знамени (1953, 1956 гг.) и удостоен звания лауреата Государственной премии СССР (1953 г.).

В эти годы Н. Н. Яненко становится высококвалифицированным специалистом в вычислительной математике, которая в то время делала свои первые шаги, в математической физике, в теории нелинейных уравнений с частными производными. Появляются его первые работы, посвященные численным методам, изучению свойств решений нелинейных уравнений. Особое внимание он уделяет уравнениям, описывающим поведение сплошной среды в разных условиях, и численным методам их решения.

В 1956 г. Н. Н. Яненко собрал и возглавил большой коллектив молодых математиков и механиков, с которым он работал над решением систем нелинейных уравнений в частных производных, развитием и усовершенствованием численных методов решения задач математической физики.

В 1957—1963 гг. он разработал свой, ныне известный во всем мире, «метод дробных шагов». Этот метод позволяет свести численное решение исходной многомерной задачи к последовательному решению ряда одномерных задач. Это оказывается весьма эффективным и снижает расход времени ЭВМ порой на несколько порядков.

С 1963 г. и до конца своей жизни Н. Н. Яненко работал в Сибирском отделении Академии наук СССР, сначала в Вычислительном центре СО АН СССР, а с 1976 г.— директором Института теоретической и прикладной механики СО АН СССР. Здесь в Сибири проявились наиболее полно его талант и организаторские способности, целеустремленность и стойкость сибиряка, принципиальность ученого-коммуниста, государственный подход к решению главных вопросов науки. Этот период научной деятельности Н. Н. Яненко является и наиболее результативным.

В Сибири Н. Н. Яненко снова приступил к подбору молодых ученых (математиков, механиков, физиков) для решения важных прикладных проблем. Его стараниями создан большой научный коллектив, который по праву может быть назван Сибирской школой академика Н. Н. Яненко. Сильно расширяется круг его научных интересов. Он занимается математическим моделированием реальных процессов как с теоретической, так и с чисто практической точек зрения. Его интересуют вопросы организации моделирования, программирования, применения ЭВМ и развития парка машин, создания пакетов прикладных программ. Он активно занимается рядом задач механики и техники.

Н. Н. Яненко продолжает интенсивную работу и по традиционным для него направлениям: системы нелинейных уравнений и теория ударных волн, теория разностных методов, модели в механике сплошных сред. В 1967 г. вышла в свет монография Н. Н. Яненко «Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики», которая вскоре была издана на немецком, французском и английском языках. Получила широкую известность монография Н. Н. Яненко «Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике» (1968 г.), написанная совместно с Б. Л. Рождественским. Она содержит результаты многолетней работы авторов и подводит итог исследованиям в теории систем нелинейных уравнений гиперболического типа с двумя независимыми переменными, выполненным к тому времени в мировой науке. Ее второе издание (1978 г.) отразило прогресс в этой области за истекшее десятилетие.

Большое развитие в работах Н. Н. Яненко и его учеников получили такие понятия, как «аппроксимационная вязкость разностной схемы», «первое и старшие дифференциальные приближения разностной схемы». В 1973 г. он начал изучать существенно нелинейные уравнения, которые изменяют свой тип в зависимости от решения. Большой цикл работ Н. Н. Яненко и его учеников по этой тематике нашел свое отражение в монографии «Нелинейные уравнения переменного типа» (1983 г.). Отметим работы Н. Н. Яненко с учениками по уточнению результатов численных расчетов газодинамических задач методом «дифференциального анализатора»; о регуляризации уравнений Навье — Стокса для несжимаемой жидкости; работы по оптимальному выбору разностных сеток.

Н. Н. Яненко является автором более 300 научных работ, в том числе восьми монографий. Ясно, что даже краткий обзор его работ требует обстоятельного исследования. Поэтому мы сможем рассмотреть ниже более подробно лишь некоторые направления его работы, характеризующие его как математика.

Большое значение Н. Н. Яненко придавал организации исследований по важным направлениям науки. Он руководил работой шести периодических всесоюзных научных семинаров.

Назовем два особенно популярных семинара .Н Н. Яненко: «Численные методы в механике вязкой жидкости» и «Модели в механике сплошных сред». Н. Н. Яненко являлся инициатором создания и ответственным редактором периодического сборника «Численные методы механики сплошной среды», членом редколлегий нескольких советских научных журналов.

Н. Н. Яненко обладал большим международным научным авторитетом. Член рабочей группы IFIP, член бюро IUTAM, член редколлегий трех международных журналов, находясь за рубежом, он всегда был страстным пропагандистом советской науки. Он читал блестящие лекции в Сорбонне и Кембридже. В этом ему помогало его отличное знание пяти иностранных языков. Большое внимание он уделял укреплению международных научных связей, особенно с братскими социалистическими странами.

Постоянную педагогическую работу Н. Н. Яненко считал необходимой составной частью работы научной. Он работал в Московском, Уральском и Новосибирском государственных университетах, стал профессором (1960 г.), заведующим кафедрой вычислительных методов механики сплошной среды НГУ. Особое внимание он уделял подготовке научных кадров высшей квалификации; среди его прямых учеников 8 докторов и 50 кандидатов наук.

Огромная научная, общественная, международная деятельность не заслоняла в Николае Николаевиче необыкновенную человеческую личность. Он был естествен, истинно интеллигентен и глубоко принципиален. Внимательность и простота, доброжелательность и постоянная готовность прийти на помощь были характерными чертами в его отношениях с друзьми, товарищами по работе, учениками. Вместе с тем настоящее мужество и несгибаемость борца были скрыты за внешней мягкостью и склонностью не быть в центре внимания. Доступный всем — от собрата по академии до студента — он все свои многочисленные таланты подчинил беззаветному служению науке.

Плодотворная многогранная деятельность Н. Н. Яненко была высоко оценена и в период его работы в Сибири. В 1966 г. он был избран членом-корреспондентом, а в 1970 г.— действительным членом Академии наук СССР, награжден орденами Трудового Красного Знамени и Октябрьской революции, вторично удостоен звания лауреата Государственной премии СССР. 22 мая 1981 г. за большие заслуги в развитии математики и механики и в связи с шестидесятилетием со дня рождения Николаю Николаевичу Яненко было присвоено высокое звание Героя Социалистического Труда.

В последние годы своей жизни Николай Николаевич работал особенно напряженно, не считаясь со временем, превозмогая нездоровье. Смерть оборвала его жизнь в расцвете творческих сил в момент, когда множество важных дел уже свершено, но еще больше дел только начато...

Светлая память о Николае Николаевиче Яненко сохранится в сердцах его учеников, друзей и товарищей, он навсегда останется идеалом настоящего человека — ученого, гражданина, патриота.

* * *

Геометрические исследования Н. Н. Яненко отражены в 13 опубликованных его работах и кандидатской и докторской диссертациях [1]). Его первые результаты относились к классической проблеме дифференциальной геометрии — проблеме *изгибания* поверхностей (в локальном аспекте). Еще в работах геометров прошлого столетия было показано, что поверхность в трехмерном евклидовом пространстве допускает непрерывное изгибание. Попытки доказать такой же результат для гиперповерхности в E_n, $n > 3$, оказались безуспешными; больше того, было обнаружено (Биц, 1876), что гиперповерхность $S_n \subset E_{n+1}$ ранга $r > 2$ неизгибаема (рангом r гиперповерхности называется размерность многообразия ее касательных гиперповерхностей). Позднее Сбрана (1909) и Картан (1917) дали полную классификацию изгибаемых гиперповерхностей. Следующим естественным шагом было исследование изгибаемых поверхностей S_n в E_{n+q} для $q > 1$. Проблема оказалась исключительно трудной, и первый существенный результат последовал лишь в 1939 году; Аллендорфер, введя понятие типа поверхности (арифметический инвариант вложения, определяемый сложным аналитическим путем), доказал, что поверхность $S_n \subset E_{n+q}$ неизгибаема, если ее тип t больше 2. Таким образом, условие $t \leqslant 2$ является необходимым (хотя и далеко не достаточным) условием изгибания. Н. Н. Яненко удалось найти ряд глубоких необходимых признаков изгибания S_n в E_{n+q}. Изучая структуру уравнений изгибания (уравнений Гаусса, Петерсона — Кодацци и Риччи), Н. Н. Яненко сумел получить ряд эффектных результатов. Вот один из них: если имеются две поверхности S'_n и S''_n, изометричные S_n, но не конгруэнтные между собой, то существует непрерывная деформация от S'_n к S''_n с сохранением метрики, т. е. непрерывное изгибание.

Задача изгибания поверхностей тесно связана с задачей *вложения* риманова многообразия в евклидово пространство (в данном случае мы опять-таки имеем в виду локальный аспект). Действительно, вопрос об изгибании есть вопрос о *числе решений* уравнений вложения и о связи между решениями, а самый вопрос о вложении есть вопрос о *существовании* решения. В проблеме вложения результаты, полученные Н. Н. Яненко, были, пожалуй, наиболее впечатляющими после работ Картана, Томаса, Аллендорфера. Рассматривая уравнения вложения S_n в E_{n+q}, Н. Н. Яненко установил необходимые условия, при которых все эти уравнения являются алгебраическими следствиями лишь одной их части — уравнений Гаусса

$$R_{ij,\,kl} = \sum_{s=1}^{q} \left(\lambda_{ik}^{(s)}\lambda_{jl}^{(s)} - \lambda_{il}^{(s)}\lambda_{jk}^{(s)}\right),$$

где неизвестными являются $\lambda_{pq}^{(s)} = \lambda_{qp}^{(s)}$. Отсюда следует, что при выполнении этих необходимых условий решение вопроса о возможности вложения S_n в E_{n+q} сводится к чисто алгебраической задаче определения рангов некоторых матриц.

Масштабность работ Н. Н. Яненко по определению класса риманова пространства V_n (минимальное значение q, при котором возможно вложение V_n в E_{n+q}) не позволяет содержательно охватить их в столь краткой форме. Поэтому ограничимся указанием только двух результатов (отобранных по принципу простоты формулировки). Вводится в рассмотрение ряд целочисленных инвариантов T_1, T_2, . . . тензора кривизны метрики V_n (причем T_1 есть ранг тензора кривизны) и доказывается, что 1) если $T_q > 2$, то класс метрики не может быть меньше, чем q; 2) если $T_q \geqslant 4$, то необходимое и достаточное условие того, что класс равен q, состоит в разрешимости уравнений Гаусса.

---

[1]) Кандидатская диссертация: О некоторых необходимых признаках изгибаемых поверхностей в n-мерном евклидовом пространстве, М., НИИМ МГУ, 1948, с. 150. Докторская диссертация: К теории вложений римановых метрик в многомерное евклидово пространство, М., МГУ (биб-ка МГУ), 1954, с. 170.

Наиболее полно геометрические результаты Н. Н. Яненко изложены им в обзорных работах [1]).

Исследованием нелинейных уравнений в частных производных и их решений Н. Н. Яненко занимался с начала пятидесятых годов до конца своей жизни. В середине нашего века быстрое развитие науки и техники, в том числе вычислительной техники, потребовало систематического применения нелинейных уравнений для описания многочисленных реальных физических явлений, расчета их решений и применения результатов расчета в конструировании и создании новых видов техники. Сразу же обнаружилась недостаточность знаний о нелинейных уравнениях и их решениях, отсутствие строгих и приближенных теорий, позволяющих надежно рассчитывать нелинейные процессы. Особенно остро встал, в частности, вопрос о создании математической теории ударных волн и, в более широком смысле, математической теории разрывных «решений» систем нелинейных уравнений в частных производных. В работу по созданию математического аппарата, отвечающего этим потребностям науки, включились крупнейшие математики.

Н. Н. Яненко также внес существенный вклад в развитие теории нелинейных уравнений математической физики и численных методов их решения. Им опубликовано около 50 работ по теории нелинейных уравнений в частных производных, в том числе 3 монографии и еще большее число работ по методам их численного решения.

Первые работы Н. Н. Яненко по теории систем квазилинейных уравнений гиперболического типа были опубликованы в 1955 г. в УМН. В одной из них Н. Н. Яненко рассмотрел вопрос о том, какие существенно нелинейные системы двух квазилинейных уравнений гиперболического типа обладают свойством сохранения гладкости их решениями, и, в частности, в решениях задачи Коши, для которых разрывы не образуются, если начальные значения их не имеют. Он нашел частный класс таких систем; в дальнейшем системы такого типа стали называться «слабо-нелинейными» системами квазилинейных уравнений.

Н. Н. Яненко привнес в исследование систем квазилинейных уравнений методы, развитые в геометрии. Он разработал т. н. «метод дифференциальных связей» для выделения классов и отыскания отдельных решений систем дифференциальных уравнений.

Основную идею этого метода Н. Н. Яненко сформулировал на IV Всесоюзном математическом съезде. Она заключается в том, что выделение частных решений системы дифференциальных уравнений

$$(S) \qquad S\,(x,\ u,\ p) = 0$$

(здесь x, u — векторы; x — независимые, а u — зависимые переменные; p — производные от u по x) осуществляется путем присоединения к ней системы дополнительных дифференциальных соотношений

$$(D) \qquad D\,(x,\ u,\ p) = 0.$$

Полученная таким образом переопределенная система (SD) исследуется на совместность. Если система (SD) совместна, то можно искать ее решения, которые будут и решениями системы (S). Произвол общего решения системы (SD) меньше произвола общего решения системы (S), поэтому их искать проще. Произвол решения заданной системы (S) последовательно сужается путем присоединения к ней все большего числа дифференциальных связей (D). При этом берутся связи самого общего вида и требуется, чтобы возникающие переопределенные системы (SD) были в инволюции.

---

[1]) Труды семинара по векторному и тензорному анализу. Гостехиздат, 1952, вып. 9, с. 236—287; там же: 1956, вып. 10, с. 139—191; УМН, 1953, 8: 1, с. 21—100; Труды ММО, 1954, 3, с. 89—180.

Известные автомодельные решения и решения с вырожденным годографом могут быть получены этим методом. С помощью метода дифференциальных связей Н. Н. Яненко и его учениками решен ряд интересных задач одномерной и многомерной газовой динамики и движения неупругой сплошной среды.

Эти и ряд других вопросов, связанных с методом дифференциальных связей, изложены подробно в монографии Н. Н. Яненко [1]), которая вышла в свет уже после его смерти.

Этапом в работе Н. Н. Яненко по нелинейным уравнениям стал выход в 1968 г. монографии [2]), которая явилась плодом многолетней работы по систематизации и изложению с общей точки зрения многочисленных научных результатов, полученных в мировой науке к этому времени в теории систем квазилинейных уравнений гиперболического типа с двумя независимыми переменными. В ней отражен прогресс в изучении как *классических*, так и *обобщенных* (разрывных) решений таких систем, в теории ударных волн и решении многих важных задач газовой динамики, а также в развитии разностных методов решения задач газовой динамики. Эта монография хорошо известна специалистам, она широко используется механиками, математиками, физиками. Она является единственной в мировой литературе книгой, достаточно полно отражающей современное состояние исследований в этой важной области. Второе издание этой монографии в 1978 г. существенно переработано и отражает прогресс, достигнутый со времени выхода первого издания; оно издано в переводе на английский язык Американским математическим обществом.

В научное содержание монографии вносят существенный вклад работы лично Н. Н. Яненко, он же предложил ряд новых изложений известных результатов. Отметим, в частности, что Н. Н. Яненко принадлежит систематизация построения решения задачи «о распаде произвольного разрыва» — одной из важнейших задач газовой динамики. Движение, возникающее в результате «распада разрыва», Н. Н. Яненко трактует как результат движения поршня одновременно в двух соседствующих средах. Здесь же впервые он проводит строгое математическое доказательство существования и единственности решения задачи «о распаде произвольного разрыва» для широкого класса термодинамических характеристик соседствующих газов.

Начиная с 1964 г. в ВЦ СО АН СССР под руководством Н. Н. Яненко проводились исследования по численному решению задач динамики вязкой несжимаемой жидкости. Уравнения Навье — Стокса в случае несжимаемой жидкости не являются, как известно, уравнениями типа Коши — Ковалевской.

В связи с этим примерно в 1965 г. у Н. Н. Яненко возникла идея замены уравнений Навье — Стокса для несжимаемой жидкости уравнениями типа Коши — Ковалевской с малым параметром ε так, чтобы при стремлении ε к нулю аппроксимирующие уравнения переходили в исходные. В математическом плане аппроксимация начально-краевой задачи для уравнений Навье — Стокса сводится, например, к решению системы уравнений

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad})\,\boldsymbol{v}+\frac{1}{2}\,\boldsymbol{v}\operatorname{div}\boldsymbol{v}+\operatorname{grad}p=\operatorname{div}\operatorname{grad}\boldsymbol{v}+\boldsymbol{f},$$

$$\varepsilon\frac{\partial p}{\partial t}+\varepsilon_1 p+\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0,\qquad t>0,\quad x\in Q,$$

---

[1]) А. Ф. Сидоров, В. П. Шапеев, Н. Н. Яненко. Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике, Новосибирск: Наука, 1984.

[2]) Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике, М., Наука, 1968; второе изд. под тем же названием: М.: Наука, 1978.

при условиях

$$v = v_0(x),\ p = p_0(x),\ \operatorname{div} v_0 = 0,\ t = 0,\ x \in Q;$$
$$v = 0,\ t > 0,\ x \in \partial Q.$$

Н. Н. Яненко и его учениками, а затем рядом ученых у нас и за рубежом было показано, что при стремлении ε и ε_1 к нулю решение ε-задачи стремится в некотором смысле к решению исходной задачи динамики вязкой жидкости.

В 1973 г. Н. Н. Яненко ввел в рассмотрение уравнение

$$(*)\qquad \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\nu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right]$$

со знакопеременным, асимптотически положительным при $|p| \to \infty$ коэффициентом $\nu(p)$. Это уравнение является обобщением известного уравнения Бюргерса, сыгравшего большую роль в изучении свойств решений уравнений газовой динамики.

Уравнение (*) было введено с целью моделирования таких сложных явлений, как потеря устойчивости, наличие автоколебаний, перемежаемости, возникающих при движении вязкой жидкости. Оно характерно тем, что на его решении может происходить смена направления параболичности, и представляет по существу новый, математический объект. Различные краевые задачи для уравнения (*) изучались как аналитическими, так и численными методами. Были доказаны теоремы существования и несуществования решений в различных ситуациях, получены результаты о единственности и неединственности, исследованы вопросы стабилизации решений при $t \to \infty$. Были построены автоколебательные решения для уравнения (*), а также решения типа ударного перехода. Посредством прямого численного моделирования изучалась устойчивость как стационарных, так и автоколебательных решений. Кроме уравнения (*) изучался и его двумерный аналог, т. е. уравнение типа Навье — Стокса со знакопеременным коэффициентом вязкости. Такие уравнения возникают при нахождении среднего профиля скорости турбулентного течения.

В ряде работ Н. Н. Яненко изучал уравнения вида

$$(**)\qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[F\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial t}\left[F_1\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right],$$

где относительно функции F предполагается, что F' может менять знак. Эти уравнения являются регуляризацией уравнения (*) и представляют самостоятельный интерес, поскольку они возникают при моделировании процессов, происходящих при старении материалов, в средах с памятью, в газовой динамике. При условии подчиненности F функции F_1 были доказаны теоремы существования и единственности решений основных краевых задач для уравнения (**).

Результаты Н. Н. Яненко и его учеников по изучению уравнений переменного типа подытожены в его последней при жизни монографии [1]).

Разностными методами и вычислительной математикой Н. Н. Яненко начал заниматься в 1949 г. Первая его работа по этой тематике была выполнена в 1951 г., а в общей сложности более 150 работ, включающих в себя его широко известную монографию [2]), лекции для сотрудников и студентов и работы как по общим, так и конкретным проблемам вычислительной математики.

Одним из главных достижений Н. Н. Яненко в вычислительной математике является создание «метода дробных шагов». Идея создания простых и экономичных методов решения многомерных задач, сводящихся к одномер-

---

[1]) Н. А. Ларькин, В. А. Новиков, Н. Н. Яненко. Нелинейные уравнения переменного типа, Новосибирск: Наука, 1983.

[2]) Н. Н. Яненко. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики, Новосибирск: Наука, 1967.

ным прогонкам, развивалась в ряде работ советских (В. К. Саульев) и американских (Писмен, Рэчфорд, Дуглас) ученых. Заслуга Н. Н. Яненко состоит в том, что, в отличие от предыдущих работ, он впервые (1959 г.) сформулировал метод сведения решения многомерной задачи к совокупности одномерных задач.

Так, например, разностное уравнение, аппроксимирующее уравнение теплопроводности в k-мерном пространстве,

$$(*) \qquad \frac{u^{n+1}-u^n}{\tau}=\sum_{s=1}^{k}\Lambda_s u^{n+1}$$

(где Λ_s— одномерные разностные операторы, аппроксимирующие операторы $\frac{\partial^2}{\partial x_s^2}$) требует для определения u^{n+1} решения системы линейных уравнений с большим числом неизвестных. Н. Н. Яненко заменяет разностное уравнение $(*)$ совокупностью k разностных уравнений

$$(**) \qquad \frac{u^{n+s/k}-u^{n+(s-1)/k}}{\tau}=\Lambda_s u^{n+s/k}, \quad s=1,\, 2,\, \ldots,\, k.$$

Каждое из разностных уравнений $(**)$ распадается на совокупность одномерных уравнений, которые легко решаются «прогонкой». Подобное «расщепление» является отражением аддитивности физических процессов и описывающих их пространственных операторов.

Представление $(**)$ было смелым и новаторским предложением, позволившим по-новому подойти ко многим вопросам теории разностных схем. Оно стимулировало дальнейший прогресс в развитии теории разностных схем для многомерных и даже для одномерных задач. Были введены обобщающие понятия суммарной аппроксимации и слабой аппроксимации многомерного уравнения системой одномерных. Это позволило производить «расщепление» разностных уравнений не только по независимым переменным, но и по различным физическим процессам, отдельным членам дифференциальных и разностных уравнений с целью облегчения решения разностных уравнений. Отметим глубокую связь методов расщепления с вопросами устойчивости решения разностных уравнений и методами их решения.

В 1968 г. Н. Н. Яненко обращается к решению многомерных уравнений Навье — Стокса сжимаемого газа, рассматривая их как наиболее полную модель исследования сложных процессов в гидро- и аэродинамике. Анализ этих решений привел его к необходимости расширения понятия расщепления и формулировке его как метода решения сложных многомерных задач математической физики. Введенная им форма геометрического, физического и аналитического расщепления послужила основой построения разностных схем для широкого класса задач математической физики.

Применение уравнений Навье — Стокса при решении задач в сложных областях потребовало развития новых методов построения расчетных сеток и разработки вариационного принципа управления сеткой. Дополняя исходные уравнения уравнениями для управления сеткой, Н. Н. Яненко рассмотрел построение сетки как задачу построения дифференциального отображения, соответствующего состоянию всего потока в целом. Это привело его к понятию информационной среды как совокупности дифференциальных уравнений, описывающих физический процесс, и уравнений для управления сеткой, автоматически адаптирующейся к потоку.

Проблему разработки эффективных численных методов решения нелинейных уравнений механики сплошной среды Н. Н. Яненко рассматривал в комплексе с проблемой эффективного использования получаемых на ЭВМ численных результатов. В частности, при решении задач газовой динамики с использованием конечно-разностных схем сквозного счета он предложил определять положение ударных волн в «размазанных» профилях численного решения с помощью специальных алгоритмов, названных им дифференциальными анализаторами. Еще в начале 60-х годов в основу этих алгоритмов Н. Н. Яненко предлагал положить определение фронтов волны как точек, в которых величина искусственной вязкости достигает своего максимума. Он явился инициатором исследований по проблеме разработки алгоритмов дифференциальных анализаторов и ряда других алгоритмов локализации особенностей при численном решении задач газодинамики. С помощью разработанной методики были исследованы известные способы локализации разрывов в численных решениях задач газовой динамики и установлены условия их применимости. Алгоритмы дифференциальных анализаторов были применены при численном исследовании ряда прикладных задач.

Н. Н. Яненко сформулировал еще в 60-х годах метод исследования свойств алгоритмов численного решения задач математической физики — так называемый метод дифференциальных приближений разностной схемы. Этот метод получил широкое развитие в работах Н. Н. Яненко и его учеников, он продолжает развиваться и в настоящее время как в СССР, так и за рубежом. Основная идея этого метода состоит в замене исследования свойств разностной схемы исследованием некоторой задачи с дифференциальными уравнениями, занимающими промежуточное положение между исходной дифференциальной задачей и аппроксимирующей ее разностной схемой.

Например, рассмотрим явную разностную схему

$$(*) \qquad \frac{u^{m+1}(x)-u^m(x)}{\tau} = \Lambda_0(h(\tau))\,u^m(x),$$

где $u^m(x) = \bar{u}(m\tau,\ x)$ — разностный аналог решения дифференциальной задачи — вектора $v(t,\ x)$, τ — шаг по времени, $\Lambda_0(h(\tau))$ — некоторый разностный оператор, аналитически зависящий от $\tau > 0$. Решение схемы $(*)$ может быть записано в виде

$$(**) \qquad u^m(x) = \bar{u}(t,\ x) = (E+\tau\Lambda_0)^{t/\tau}\,u^0(x),$$

где $t = m\tau$. Представление $\bar{u}(t,\ x)$ в виде $(**)$ аналитически продолжим для всех $t,\ \tau > 0$. Дифференцируя $(**)$ по t, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial t} = \frac{1}{\tau}\ln\left[E+\tau\Lambda_0\right]\bar{u}$$

и, раскладывая его по τ при $\|\tau\Lambda_0\| < 1$, приходим к следующему представлению разностной схемы:

$$(***) \qquad \frac{\partial\bar{u}(t,\ x)}{\partial t} = \left[\Lambda_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{\tau^n}{n+1}\Lambda_0^n\right]\bar{u}.$$

Оставляя в правой части $(***)$ несколько старших членов ряда, мы получаем дифференциальные приближения разностной схемы $(*)$ различных порядков. При этом следует учесть зависимость Λ_0 от τ. Если, наконец, представить $\Lambda_0(h(\tau))$ в виде ряда, содержащего операторы дифференцирования по пространственным координатам x (что обычно возможно для разностных схем), и оставить в нем лишь старшие по τ члены, то мы получаем дифференциальные приближения схемы $(*)$ в виде уравнений с частными производными. Изучая эти уравнения с частными производными, можно сделать определенные заключения о свойствах разностной схемы $(*)$, таких как устойчивость, аппроксимация, точность, групповые свойства и др.

Н. Н. Яненко рассматривал этот метод как средство не только исследования, но и построения разностных схем. Литература по методу дифференциального приближения насчитывает в настоящее время более двухсот наименований. Большинство результатов в этих работах носит эвристический характер, но они подтверждаются многочисленными расчетами. Строгие результаты получены, в основном, учениками Н. Н. Яненко.

* * *

Заканчивая этот краткий обзор научной деятельности Н. Н. Яненко, еще раз подчеркнем, что многие важные направления его исследований остались вне круга нашего рассмотрения. Николай Николаевич Яненко оставил богатое научное наследие, которое нуждается в серьезном изучении. Нет сомнения в том, что его многочисленные ученики продолжат и разовьют все важнейшие его работы и замыслы.

В. Г. Дулов, С. П. Новиков, Л. В. Овсянников,
Б. Л. Рождественский, А. А. Самарский, Ю. И. Шокин