SUOMALAISEN TIEDEAKATEMIAN TOIMITUKSIA
ANNALES ACADEMIÆ SCIENTIARUM FENNICÆ

SARJA SERIES A

I. MATHEMATICA

250/18

SUR LA THÉORIE DES REPRÉSENTATIONS QUASI-CONFORMES

PAR

M. A. LAVRENTIEFF

HELSINKI 1958
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

AKATEEMINEN KIRJAKAUPPA
Helsinki

OTTO HARRASSOWITZ
Wiesbaden

SUOMALAISEN TIEDEAKATEMIAN TOIMITUKSIA
ANNALES ACADEMIÆ SCIENTIARUM FENNICÆ

SARJA
SERIES A

I. MATHEMATICA

250/18

SUR LA THÉORIE DES REPRÉSENTATIONS QUASI-CONFORMES

PAR

M. A. LAVRENTIEFF

HELSINKI 1958
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

Présenté à l'Académie le 13 décembre 1957 par MM. P. J. Myrberg et R. Nevanlinna.

HELSINKI 1958
KESKUSKIRJAPAINO

Sur la théorie des représentations quasi-conformes.

Je veux m'arrêter dans la présente communication sur certaines questions de la théorie des représentations quasi-conformes liées aux principaux problèmes des systèmes d'équations aux dérivées partielles. Ces questions se rattachent étroitement à la mécanique des fluides et à quelques problèmes de géométrie. Je commencerai par le cas plan, c'est-à-dire par un problème aux limites pour un système de deux équations à deux fonctions inconnues.

1. Cas plan, notions générales. Rappelons quelques définitions principales. Soit

$$(1)\qquad \begin{aligned} &F_1\left(x, y, u, v, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0, \\ &F_2\left(x, y, u, v, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0 \end{aligned}$$

un système d'équations aux dérivées partielles, dont nous supposons que F_1 et F_2 possèdent des dérivées partielles jusqu'au second ordre. (Notons immédiatement que des résultats fondamentaux peuvent être obtenus en supposant seulement l'existence des dérivées premières, satisfaisant à la condition de Hölder.)

Définition 1. *Nous disons que la représentation (homéomorphe)*

$$(2)\qquad u = u(x, y), \qquad v = v(x, y)$$

du domaine D sur le domaine Δ est une représentation quasi-conforme, correspondant au système (1), *si les fonctions* (2), *qui réalisent la représentation, vérifient le système* (1).

Plusieurs problèmes classiques de la géométrie et de la mécanique des fluides et des gaz se réduisent au problème de la représentation quasi-conforme d'un domaine sur un autre — par exemple la représentation conforme d'une surface riemanienne sur le plan d'Euclide est le problème de la représentation quasi-conforme, correspondant au système (1) quand ce système est linéaire, homogène et elliptique; le problème du courant de gaz sur une bande curviligne est le problème d'une représentation quasi-conforme (de la bande du courant sur une bande rectiligne) correspondant au système

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \varkappa(V) \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\varkappa(V) \frac{\partial u}{\partial x},$$

où $V^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ et $\varkappa(V)$ est une fonction positive donnée.

Je vais citer maintenant quelques résultats, obtenus encore en 1944—1945.

2. Ellipticité forte et problème de Riemann. Considérons la représentation (2) qui correspond au système (1) et supposons qu'au point x_0, y_0,

$$u(x_0, y_0) = u_0, \qquad v(x_0, y_0) = v_0$$

on a

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} > 0.$$

Alors, au voisinage de x_0, y_0, nous avons

$$(3) \qquad \begin{aligned} u - u_0 &= a_1(x - x_0) + b_1(y - y_0) + \cdots, \\ v - v_0 &= a_2(x - x_0) + b_2(y - y_0) + \cdots. \end{aligned}$$

Cela posé, considérons sur le plan u, v le carré à sommet au point u_0, v_0 et à côté $\bar{A}$, $|\bar{A}| = 1$, formant avec l'axe u l'angle ν. En vertu de (3), ce carré va correspondre sur le plan x, y au parallélogramme Π_ν, que nous allons déterminer comme suit: Désignons par $\bar{V}_\nu$ le vecteur qui correspond au côté $\bar{A}$,

$$|\bar{V}_\nu| = V_\nu,$$

$$\arg \bar{V}_\nu = \alpha_\nu,$$

par Θ_ν l'angle du sommet de Π_ν dans le point x_0, y_0 et par W_ν la hauteur (abaissée sur le vecteur $\bar{A}$) de Π_ν. Nous nommons les quantités introduites

V, α, Θ, W les caractéristiques de la représentation dans le point x_0, y_0. Le système (1) peut être exprimé dans les caractéristiques:

$$W = \Phi_1(x, y, u, v, V, \alpha),$$
(4)
$$\Theta = \Phi_2(x, y, u, v, V, \alpha).$$

Dans le cas des équations de la dynamique de gaz (pour $v = 0$), nous obtenons

$$W = F(V), \qquad \Theta = \frac{\pi}{2}.$$

Définition 2. *Nous disons que le système* (1) *ou* (4) *est fortement elliptique si, quel que soit* v, *on a*

(5)
$$1^\circ \qquad 0 < \Theta_0 < \Theta < \Theta_1 < \pi,$$
$$2^\circ \qquad \frac{\partial W}{\partial V} > k > 0,$$

où Θ_0, Θ_1 *et* k *sont des constantes positives.*

Avec une telle définition les théorèmes les plus importants de la théorie des représentations conformes peuvent être étendus aux représentations quasi-conformes correspondant aux systèmes fortement elliptiques.

Théorème 1. *Quels que soient deux domaines simplement connexes* D *et* Δ *(chacun contient un continu sur la frontière) et quel que soit le système fortement elliptique, il existe toujours une représentation quasi-conforme de* D *sur* Δ, *correspondant à ce système — cette représentation est déterminée d'une manière unique si nous supposons que trois points de la frontière de* D *correspondent aux trois points de la frontière de* Δ.

Théorème 2. *Dans le cas où les fonctions* Φ_1, Φ_2 *dépendent seulement de* V *et* α

$$W = \Phi_1(V, \alpha), \qquad \Theta = \Phi_2(V, \alpha) \tag{6}$$

les principes de Lindelöf et de M. Montel sont valables pour les représentations correspondantes.

Par conséquence, toutes les propriétés des représentations conformes qui découlent des principes indiqués, subsistent pour les représentations quasi-conformes.

Dans le cas général, les principes indiqués sont valables seulement sous la forme qui correspond aux représentations des bandes sur les bandes rectilignes, à la condition supplémentaire que ces bandes doivent être suffisemment étroites.

Ceci est suffisant pour généraliser dans le cas des représentations quasi-conformes, quelques théorèmes de la théorie des représentations conformes. Par exemple, les théorèmes sur les derivées frontières.

3. Système dérivé. Une des conceptions auxiliaires les plus importantes de la théorie est la conception du système dérivé.

Théorème 3. *Les caractéristiques* $P = \log V$ *et* α *vérifient le système d'équations*

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= A_1 \frac{\partial \alpha}{\partial x} + B_1 \frac{\partial \alpha}{\partial y} + C_1 , \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= A_2 \frac{\partial \alpha}{\partial x} + B_2 \frac{\partial \alpha}{\partial y} + C_2 , \end{aligned} \tag{7}$$

où les coefficients A, B, C *sont des fonctions des variables* x, y, u, v, V, α. *Si le système* (4) *est fortement elliptique, le système* (7) *l'est de même.*

4. Problèmes des courants. On peut résoudre aussi des problèmes analogues aux problèmes d'hydrodynamique des sillages libres. Pour les représentations correspondant au système (6), étant donné une ligne Γ_0: $y = y_0(x)$ il faut construire une autre ligne Γ_1: $y = y_1(x)$ de manière que la représentation quasi-conforme de la bande $y_0(x) < y < y_1(x)$ sur la bande $0 < v < 1$ soit telle que $V + \lambda y = 1$ le long de la ligne Γ_1.

On peut démontrer que pour λ suffisamment petit, la solution du problème posé existe et qu'elle est unique.

5. Problème de l'espace à trois dimensions. Par analogie avec le cas plan, la solution du système de trois équations aux dérivées partielles peut être interprétée comme une représentation quasi-conforme d'un certain domaine D de l'espace $A(x, y, z)$ sur un domaine Δ de l'espace B (u, v, w). Les trois équations

$$F_i\left(x, y, z, u, v, w, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{8}$$

peuvent être de même interprétées comme des relations entre les »caractéristiques» du parallélépipède de l'espace des points de A, qui se transforme dans notre représentation en un cube — le système (8) sera équivalent au système de trois relations entre les 9 »caractéristiques» du parallélépipède. Par analogie avec le cas plan, on peut construire de même »un système dérivé d'équation» relativement aux 6 caractéristiques du parallélépipède (considérées comme indépendantes).

La possibilité d'introduire des classes des systèmes d'équations suffisamment générales dites »fortement élliptiques» aux quels on peut énoncer des propriétés générales, analogues aux propriétés principales des représentations conformes, nous paraît être importante.

Je citerai à présent certains résultats assez simples et particulières qui concernent une classe de représentations liées à la théorie du potentiel.

6. Images harmoniques. Étant donné dans l'espace $A(x, y, z)$ un domaine D (qui satisfait aux conditions de Wiener, pour que le problème de Dirichlet soit toujours résoluble) et soit A_0 un point intérieur de D; construisons pour D la fonction de Green

$$G(A, A_0) = G(x, y, z) = \frac{1}{\varrho} + G_1(x, y, z),$$

où

$$\varrho = \overline{A_0 A} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$$

et G_1 est une fonction continue dans D.

Construisons maintenant une représentation univalente du domaine D sur la sphère unique $r < 1$ de l'espace $B(u, v, w)$. La surface

$$G = \frac{1}{r} - 1 \tag{9}$$

se transforme en surface de la sphère à rayon r; toutes les lignes qui sont orthogonales aux surfaces (9) se transforment en rayons de la sphère $u^2 + v^2 + w^2 = 1$. Notre représentation est définie par ces conditions jusqu'à la correspondance des frontières du domaine D et de la sphère. Nous définirons la correspondance des frontières de telle manière que notre représentation soit conforme au voisinage infiniment petit du point A_0. Nous appellerons la représentation construite représentation harmonique. Indiquons quelques propriétés géométriques et analytiques de ces représentations.

1. La représentation harmonique existe et elle est unique pour tous les domaines limités par des surfaces qui vérifient la condition de Wiener.

2. Si la frontière du domaine vérifie la condition de Hölder-Liapounoff, les fonctions qui réalisent la correspondance des frontières possèdent des dérivées qui vérifient de même la condition de Hölder-Liapounoff.

3. Soit

$$B = f(A), \qquad B_0 = f(A_0)$$

la représentation harmonique de la sphère $|A| < 1$ sur un domaine qui ne contient pas une ligne fermée L; il existe alors les constantes positives a_0 et K qui ne dépendent que de L, telles que pour $\overline{A_0 A} < a_0$ on a

$$|f(A)| < K \cdot \overline{A_0 A} .$$

Le théorème cité peut être considéré comme une généralisation naturelle d'un théorème classique sur les fonctions analytiques univalentes.

Académie des Sciences d'U.R.S.S.,
Moscou, U.R.S.S.

Imprimé IV. 1958.

Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ
Series A. I. Mathematica — Physica

Mathematica:

200. **MYRBERG, P. J.,** Darstellung automorpher Funktionen durch Zusammensetzung von elliptischen und fuchsoiden Funktionen. (9 pp.) 1955 ...... 75:—
201. **JÄRNEFELT, G.** und **QVIST, BERTIL,** Die Isomorphie eines elementargeometrischen und eines *Galois*-Gitterpunktemodells. (11 pp.) 1955 .... 75:—
202. **LOKKI, OLLI,** Über analytische Funktionen mit gegebenen Randwerten. (10 pp.) 1955 .... 75:—
203. **LOUHIVAARA, I. S.,** Über das zweite und dritte Randwertproblem für die Differentialgleichung $u_{xx} + u_{yy} + q\,u + f = 0$. (14 pp.) 1955 .... 100:—
204. **ELFVING, G.,** An expansion principle for distribution functions with application to Student's statistic. (8 pp.) 1955 .... 75:—
205. **KILPI, YRJÖ,** Zur Theorie des mehrdimensionalen Momentenproblems. (13 pp.) 1955 .... 100:—
206. **AHLFORS, LARS V.,** Conformality with respect to Riemannian metrics. (22 pp.) 1955 .... 125:—
207. **NEVANLINNA, F.** und **NIEMINEN, T.,** Das Poisson-Stieltjes'sche Integral und seine Anwendung in der Spektraltheorie des Hilbert'schen Raumes. (39 pp.) 1955 .... 150:—
208. **LAURIKAINEN, K. V.,** Notes on a variational method in the deuteron problem (7 pp.) 1955........ 75:—
209. **MYRBERG, LAURI,** Über Abelsche Integrale mit unendlich vielen Singularitäten auf offenen Riemannschen Flächen. (21 pp.) 1955 .... 125:—
210. **LEHTO, OLLI,** On the first boundary value problem for functions harmonic in the unit circle. (26 pp.) 1955 .... 125:—
214. **MESCHKOWSKI, HERBERT,** Über beschränkte lineare Transformationen in Banachschen Räumen. (14 pp.) 1955 .... 100:—
215. **READE, MAXWELL,** On the coefficients of certain univalent functions. (6 pp.) 1956 .... 75:—
216. **PFLUGER, ALBERT,** Ein Approximationssatz für harmonische Funktionen auf Riemannschen Flächen. (8 pp.) 1956 .... 75:—
217. **LAASONEN, PENTTI,** Simultane Bestimmung mehrerer Eigenwerte mittels gebrochener Iteration. (8 pp.) 1956 .... 75:—
219. **NEVANLINNA, ROLF,** Über den Satz von Stokes. (24 pp.) 1956 .... 150:—
220. **SCHMEIDLER, WERNER,** Über symmetrische algebraische Integralgleichungen. (18 pp.) 1956 .... 150:—
222. **NEVANLINNA, ROLF,** Über metrische lineare Räume V. (6 pp.) 1956 ...... 100:—
223. **MYRBERG, P. J.,** Über automorphe Thetafunktionen bei fuchsschen Gruppen vom Geschlecht Null. (11 pp.) 1956 .... 100:—
224. **GRAEUB, WERNER** und **NEVANLINNA, ROLF,** Zur Grundlegung der affinen Differentialgeometrie. (23 pp.) 1956 .... 150:—
225. **MYRBERG, P. J.,** Über automorphe Thetafunktionen zweiter Ordnung bei fuchsschen Gruppen beliebigen Geschlechtes. (11 pp.) 1956 .... 100:—
226. **MATTILA, SAKARI,** Some tests based on moving average operations on time series. (12 pp.) 1956 .... 100:—
227. **PESONEN, ERKKI,** Über die Spektraldarstellung quadratischer Formen in linearen Räumen mit indefiniter Metrik. (31 pp.) 1956 .... 200:—
229. **LOHWATER, A. J.,** The reflection principle and the distribution of values of functions defined in a circle. (18 pp.) 1956 .... 150:—
230. **LAASONEN, PENTTI,** Bemerkung zur iterativen Lösung der Eigenwertaufgabe einer Vektordifferentialgleichung. (8 pp.) 1956 .... 100:—

VERTE!

2-03

232. **LOUHIVAARA, I. S.**, Bemerkung zur Theorie der NEVANLINNAschen Räume. (7 pp.) 1956 .... 100:—
233. **VALA, KLAUS**, Sur la puissance extérieure d'un espace linéaire. (36 pp.) 1956 .... 200:—
235. **MYRBERG, P. J.**, Über eine Klasse von automorphen Funktionen mehrerer Variablen, die vermittels periodischer Funktionen darstellbar sind. Erster Teil: Kommutative Gruppen. (10 pp.) 1957 .... 100:—
236. **KILPI, YRJÖ**, Über das komplexe Momentenproblem. (32 pp.) 1957 .... 250:—
237. **KARRER, GUIDO**, Spektraltheorie der Automorphismen Hermite'scher Formen. (37 pp.) 1957 .... 250:—
238. **MYRBERG, P. J.**, Über eine Klasse von automorphen Funktionen mehrerer Variablen, die vermittels periodischer Funktionen darstellbar sind. Zweiter Teil: Die nichtkommutativen Gruppen. (16 pp.) 1957 .... 150:—
239. **LOHWATER, A. J.** and **PIRANIAN, G.**, The boundary behavior of functions analytic in a disk. (17 pp.) 1957 .... 150:—
240. **LEHTO, OLLI** and **VIRTANEN, K. I.**, On the behaviour of meromorphic functions in the neighbourhood of an isolated singularity. (9 pp.) 1957 .... 100:—
241. **LAASONEN, PENTTI**, On the behavior of the solution of the Dirichlet problem at analytic corners. (13 pp.) 1957 .... 125:—
242. **LOUHIVAARA, I. S.**, Zur Theorie der Unterräume in linearen Räumen mit indefiniter Metrik. (7 pp.) 1957 .... 100:—
243. **STREBEL, KURT**, Eine Abschätzung der Länge gewisser Kurven bei quasikonformer Abbildung. (10 pp.) 1957 .... 100:—
244. **MYRBERG, LAURI**, Über meromorphe Funktionen und Kovarianten auf Riemannschen Flächen. (17 pp.) 1957 .... 150:—
245. **NEVANLINNA, F.**, Über die Umkehrung differenzierbarer Abbildungen. (14 pp.) 1957 .... 150:—
246. **LAASONEN, PENTTI**, On the degree of convergence of discrete approximations for the solutions of the Dirichlet problem. (19 pp.) 1957 .... 200:—
247. **FISCHER, H. R.**, Differentialkalkül für nicht-metrische Strukturen. (15 pp.) 1957 .... 150:—
248. **MYRBERG, P. J.**, Eine Anwendung der Differenzengleichungen auf gewisse automorphe Funktionen zweier Variablen, deren Gruppe kommutativ ist. (10 pp.) 1958 .... 100:—

100:—