Доклады Академии Наук СССР

1937. Том XVI, № 3

МАТЕМАТИКА

М. КЕЛДЫШ и М. ЛАВРЕНТЬЕВ

ОБ ЕДИНСТВЕННОСТИ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 7 VI 1937)

В своей монографии по теории потенциала (1) Н. М. Гюнтер отметил, как до сих пор не разрешенный, вопрос об единственности решения задачи Неймана для областей, ограниченных поверхностями Ляпунова. В настоящей заметке мы имеем в виду привести весьма простое геометрическое решение этого вопроса для класса областей, содержащего области, ограниченные поверхностями Ляпунова.

Обозначим через $T(\alpha, k, h)$ тело вращения, ограниченное поверхностью $z = k(x^2 + y^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}$ $(k > 0, \ \alpha > 0)$ и плоскостью $z = h$, $(h > 0)$; точку $(0, 0, 0)$ тела мы будем называть его вершиной, а часть границы T, лежащую в плоскости $z = h$,—его основанием.

Мы скажем, что односвязная область D принадлежит к классу A, если, какова бы ни была точка P границы области D, можно построить тело T', конгруэнтное $T(\alpha, k, h)$, принадлежащее замкнутой области $\overline{D}$ и имеющее свою вершину в точке P.

Если при этом числа α, k, h могут быть взяты независящими от точки P, то мы скажем, что область D принадлежит к классу $B(\alpha, k, h)$.

Очевидно, что совокупность областей класса A содержит все области, ограниченные поверхностями Ляпунова.

Теорема 1. *Пусть U есть гармоническая функция, отличная от константы, правильная в области D, и пусть в точке P_0 границы D функция U имеет единственное предельное значение U_0, равное нижней границе ее значений в D. Если в область D можно вписать тело T', конгруэнтное T и с вершиной в точке P, то имеем:*

$$\liminf_{P \to P_0} \frac{U(P) - U(P_0)}{\overline{PP_0}} > 0,$$

где P—точка оси тела T'.

В самом деле, обозначим через σ границу T', через σ' основание T' и через σ'' часть σ, дополнительную к σ'. Пусть U_1—минимум U на σ', $U_1 > U_0$. Построим в T' гармоническую функцию V, равную U_0 на σ'' и равную U_1 на σ'. В силу принципа максимума имеем:

$$\liminf_{P \to P_0} \frac{U(P) - U(P_0)}{\overline{PP_0}} > \lim_{P \to P_0} \frac{V(P) - V(P_0)}{\overline{PP_0}}. \tag{1}$$

Легко усмотреть, что в силу неравенства (1) и в силу того же принципа максимума для доказательства теоремы достаточно в области $T(\alpha, k, h)$ построить гармоническую функцию W, удовлетворяющую следующим условиям: 1) $W=0$ в вершине тела T; 2) W не положительна по боковой поверхности тела T; 3) $\frac{\partial W}{\partial z}>0$ в вершине тела T. Кроме того, очевидно, достаточно построить такую функцию при достаточно малых значениях h. При соответствующем подборе положительных постоянных λ и β и при достаточно малом h можно достигнуть выполнения всех поставленных условий, положив

$$W=r\cos\theta+\lambda r^{1+\beta}P_{1+\beta}(\cos\theta) \tag{2}$$

где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, θ—угол, составляемый радиусом-вектором точки (x, y, z) с осью z, и $P_{1+\beta}(t)$—решение уравнения Лежандра, порядка $1+\beta$, регулярное и равное единице при $t=1$.

Из доказанной теоремы непосредственно вытекают следующие результаты.

Теорема 2. *В области D, принадлежащей классу A, не существует гармонической функции, непрерывной в $\overline{D}$, отличной от константы и имеющей на границе D нормальную производную, равную нулю.*

Теорема 3. *Если гармоническая функция U, определенная и непрерывная в области $\overline{D}$, принадлежащей к классу $B(\alpha, k, h)$, удовлетворяет условию*

$$\left|\frac{\partial U}{\partial n}\right|<\varepsilon,$$

где ∂n—элемент нормали к границе D, то функция U уклоняется от константы не больше, чем на $Kd\varepsilon$, где d—диаметр области D, а K зависит только от α, k и h.

Математический институт им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.
Москва.

Поступило
7 VI 1937.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Gunther, La théorie du potentiel et ses applications aux problèmes fondamentaux de la physique mathématique, Paris, p. 97 (1934).