Wie bekannt, ist die allgemeine Form eines linearen Funktionals im Raume c die folgende:

$$\varphi(x) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots \alpha_n x_n + \ldots, \quad \sum_n |\alpha_n| < +\infty. \qquad [2]$$

Nach einem allgemeinen Satze von S. Banach (1), kann ein solches Funktional, ohne seine Norm zu vergrössern, auf den ganzen Raum m fortgesetzt werden (nicht eindeutig). Eine von solchen Fortsetzungen wird durch die Formel [2] geliefert, welche für jeden $x \in m$ einen Sinn hat. Der folgende Satz charakterisiert diese Fortsetzung als die einzige, welche die Norm nicht vergrössert.

Satz 2. Jede Fortsetzung eines in c gegebenen linearen Funktionals auf m, die nicht durch Form [2] ausgedrückt wird, vergrössert notwendig seine Norm.

Satz 3. Die allgemeine Form einer totalstetigen (bzw. einfach stetigen) linearen Operation, die l_1 in sich abbildet, wird durch

$$y_m = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{mn} x_n \qquad [4]$$

gegeben, wobei die Reihen

$$\sum_{m=1}^{\infty} |\alpha_{mn}|, \quad n = 1, 2, \ldots \qquad [5]$$

gleichmässig in n konvergieren (bzw. konvergieren und beschränkte Summen haben).

Forschungsinstitut
für Mathematik und Mechanik der Universität.
Leningrad.

Eingegangen
d. 1. XII. 1934.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — LITERATUR

1 S. Banach. Théorie des opérations linéaires. Warszawa, 1932. 2 A. Kolmogoroff. Math. Ann., Bd. 103, 1930, insbes. S. 663 und 683. 3 Г. М. Фихтенгольц и Л. В. Канторович. ДАН, 1934, т. III, № 5, стр. 307. G. Fichtenholz u. L. Kantorovič. C. R. Acad. Sci. URSS, 1934, v. III, № 5, S. 310.

МАТЕМАТИКА

М. КЕЛДЫШ и М. ЛАВРЕНТЬЕВ

К ТЕОРИИ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

(Представлено академиком Н. Н. Лузиным 2 XII 1934)

Пусть D есть область Жордана, ограниченная спрямляемой кривой Γ, и пусть $w = f(z)$ есть функция, реализующая конформное отображение круга $|z| < 1$ на область D. Ряд граничных задач теории функций сводится к вопросу о представимости функции $\ln |f'(z)|$ при $|z| < 1$ интегралом Пуассона. В первой части настоящей заметки дается решение этой задачи, а также задач, с ней связанных. Во второй части рассматривается вопрос о представимости функции $z = \varphi(w)$ обратной для $w = f(z)$ рядом полиномов.

1. Теорема 1. Существует односвязная и однолистная область Δ, отличная от круга $|w|<1$, ограниченная спрямляемой кривой, содержащая точку $w=0$ и такая, что при конформном отображении этой области на круг $|z|<1$, $z=\varphi(w)$, $\varphi(0)=0$, всякая дуга γ, принадлежащая Γ, переходит в дугу окружности $|z|=1$ той же длины.

Отметим ряд свойств области Δ.

Свойство 1. Для функции, дающей конформное отображение круга $|z|<1$ на область Δ, $\ln|f'(z)|$ не представим интегралом Пуассона.

Свойство 2. Каковы бы ни были числа $\delta>0$, $K>0$, существуют числа $\varepsilon>0$, $\rho<1$ и на кривой $|\varphi(w)|=\rho$ система дуг с суммой длин равной ε, такие что при отображении Δ на круг $|z|<1$ дугам γ_i соответствуют дуги окружности $|z|=\rho$, сумма длин которых больше, чем: $K|\ln\varepsilon|^{-1-\delta}$.*

Свойство 3. Пусть r конформный радиус области Δ, соответствующий точке $w=0$, $(r=|\varphi'(0)|)$, и пусть $\psi(w)$ функция, правильная в замкнутой области и удовлетворяющая условию $|\psi(0)|=1$. Существует абсолютная константа $a>1$, такая что

$$\int\limits_{\Gamma}|\Psi(w)|\cdot|dw|>2\pi ra.$$

Из рассмотрений В. И. Смирнова (²) и свойства 1 области Δ непосредственно вытекают дальнейшие свойства области Δ.

Свойство 4. В области Δ существует функция $F(w)$, представимая в Δ интегралом Коши и такая, что внутри Δ имеем: $|F(w)|>1$, а на границе Δ почти всюду $|F(w)|=1$.

Свойство 5. Для области Δ не существует полной системы полиномов, ортогональных по контуру Γ.

2. Пусть D произвольная однолистная и односвязная область, ограниченная спрямляемой кривой Γ и содержащая точку $w=0$. Обозначим через $J_n(w)$** полином

$$J_n(w)=w+c_2w^2+\ldots+c_nw^n,$$

реализующий минимум интеграла:

$$\int\limits_{\Gamma}|P_n'(w)||dw|,$$

где:

$$P_n(w)=w+a_2w^2+\ldots+a_nw^n.$$

Обозначим через K_0 класс односвязных областей, ограниченных спрямляемой кривой и таких, что $\ln|f'(z)|$ представим интегралом Пуассона при $|z|<1$, где $w=f(z)$, $f(0)=0$ есть функция, дающая конформное отображение круга на область D.

Класс K_0 содержит все области, ограниченные спрямляемой кривой и принадлежащие классу $R\,(m,+\infty)$ или классу $R(-\infty, M)$.

Класс K_0 также содержит все области, граница Γ которых обладает следующим свойством: существует число p, $p>0$ такое, что какова бы ни была дуга γ, $\gamma\subset\Gamma$, отношение длины γ к ее диаметру не больше p.

* Это свойство показывает, что невозможно существенно обобщить одну теорему М. Лаврентьева (¹).

** Полиномы $J_n(w)$ были впервые рассмотрены G. Julia.

Теорема 2. Для того чтобы последовательность полиномов $J_n(w)$ сходилась внутри области Δ, к функции, дающей конформное отображение Δ на круг $|z|<1$, $\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)=1$, необходимо и достаточно, чтобы D принадлежала классу K_0. Если область D принадлежит классу K_0, то сходимость равномерна в замкнутой области $\overline{D}$.

Физико-математический институт
им. В. А. Стеклова Академии Наук СССР.
Москва.

Поступило
2 XII 1934.

MATHÉMATIQUES

SUR LA REPRÉSENTATION CONFORME

Par M. KELDYŠ (KELDYSCH) et M. LAVRENTJEV

(*Présenté par N. Lusin, de l'Académie, le 2. XII. 1934*)

Soit D un domaine de Jordan, limité par une courbe rectifiable et soit $w=f(z)$ la fonction qui réalise la représentation conforme du cercle $|z|<1$ sur D. Quelques problèmes limites de la théorie des fonctions se réduisent à la question suivante: la fonction $\ln|f'(z)|$, est-elle représentable par l'intégrale de Poisson dans le cercle $|z|<1$? Dans la première partie de cette Note nous donnons une réponse à cette question et à quelques questions qui s'y rattachent. Dans la deuxième partie nous obtenons une propriété des polynômes extrémaux introduits par M. Julia.

1. Théorème 1. Il existe un domaine Δ, simplement connexe, univalent, limité par une courbe rectifiable Γ, renfermant l'origine; ce domaine ne coïncide pas avec le cercle $|w|<1$ et jouit de la propriété suivante: dans la représentation conforme $z=\varphi(w)$, $\varphi(0)=0$, de Δ sur le cercle $|z|<1$, il correspond à chaque arc γ, $\gamma\subset\Gamma$, une arc de même longueur sur la circonférence $|z|=1$.

Indiquons quelques propriétés nouvelles du domaine Δ.

1-re propriété. Soit $w=f(z)$ la fonction qui réalise la représentation conforme du cercle $|z|<1$ sur Δ. La fonction $\ln|f'(z)|$ n'est pas représentable par l'intégrale de Poisson dans le cercle $|z|<1$.

2-me propriété. Quels que soient deux nombres positifs K et δ, il existe deux nombres $\rho<1$ et $\varepsilon>0$ et un système d'arcs γ_i, dont la somme des longueurs est égale à ε, sur la courbe $|\varphi(w)|=\rho$, tels que dans la représentation conforme de Δ sur la cercle $|z|<1$, il correspond aux arcs γ_i un système d'arcs de $|z|=\rho$, dont la somme des longueurs est plus grande que $K|\ln\varepsilon|^{-1-\delta}$.*

3-me propriété. Soit $\psi(w)$ une fonction régulière dans le domaine fermé $\overline{\Delta}$, et telle que, $|\psi(0)|=|\varphi'(0)|$. Il existe une constante absolue a, telle que

$$\int_{\Gamma}|\psi(w)||dw|>2\pi+a.$$

* Il résulte de cette propriété que les théorèmes 5 et 6 de M. Lavrentjev (1) ne sont pas susceptibles d'une généralisation essentielle.

En comparant la première propriété de Δ avec quelques résultats de V. Smirnov [2], on obtient les deux propriétés suivantes de Δ.

4-me propriété. Il existe une fonction $F(w)$, représentable par l'intégrale de Cauchy à l'intérieur de Δ et telle qu' à l'intérieur de Δ $|F(w)|>1$, et sur la frontière de Δ on a $|F(w)|=1$ presque partout.

5-me propriété. Il n'existe pour le domaine Δ aucun système complet de polynômes orthogonaux sur le contour Γ.

2. Soit D un domaine simplement connexe quelconque, limité par une courbe rectifiable Γ, renfermant l'origine. Désignons par $J_n(w)$ le polynôme

$$J_n(w)=w+c_2 w^2+\ldots+c_n w^n$$

qui donne la valeur minimale à l'intégrale

$$\int\limits_{\Gamma}|P'_n(w)|\,dw, \quad \text{où} \quad P_n(w)=w+a_2 w^2+\ldots+a_n w^n.*$$

Désignons par K_0 la classe des domaines limités par les courbes rectifiables et tels que $\ln|f'(z)|$ est représentable par l'intégrale de Poisson dans le cercle $|z|<1$, où $f(z)$ réalise la représentation conforme du cercle $|z|<1$ sur D $(f(0)=0)$.

La classe K_0 contient les domaines limités par les courbes rectifiables et appartenant à la classe $R(m,+\infty)$ ou à la classe $R(-\infty, M)$**.

La classe K_0 contient aussi les domaines, dont la frontière Γ jouit de la propriété suivante: il existe un nombre positif p, tel que, quel que soit l'arc $\gamma, \gamma\subset\Gamma$, le rapport de la longueur de γ à son diamètre est inférieur à p.

Théorème 2. Pour que la suite des polynômes $J_n(w)$ converge à l'intérieur du domaine D vers la fonctions $\varphi(w)$, réalisant la représentation conforme du domaine D sur le cercle $|z|<1$, $(\varphi(0)=0$, $(\varphi'(0)=1)$, il est nécessaire et suffisant que D appartienne à la classe K_0. Si le domaine D appartient à la classe K_0, la convergence est uniforme dans le domaine fermé $\overline{D}$.

Institut physico-mathématique V. Stekloff de l'Académie des Sciences de l'URSS. Moscou.

Manuscrit reçu le 2. XII. 1934.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — LITTÉRATURE CITÉE

[1] М. Лаврентьев. ДАН, 1935, I, 1, теорема 5. M. Lavrentjev. C. R. Acad. Sci. URSS, 1935, I, 1. [2] В. П. Смирнов. ИМЕН, 1932. V. Smirnov. Bull. Acad. Sci URSS, 1932.

* Les polynômes $J_n(w)$ ont été introduits par M. Julia.

** La définition des classes $R(m,+\infty)$ et $R(M,+\infty)$ voir l. c., p. 2.