Доклады Академии Наук СССР
Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de l'URSS

МАТЕМАТИКА

М. ЛАВРЕНТЬЕВ

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком Н. Н. Лузиным 1 XII 1934)

В настоящей заметке мы имеем в виду отметить несколько новых результатов, касающихся соответствия границ при конформном отображении.

1. Введем предварительно несколько геометрических понятий. Пусть C есть простая замкнутая аналитическая кривая в плоскости z. Обозначим через $\alpha(t)$ угол, образованный касательной к C в точке t с действительной осью. Обозначим соответственно через $m(C)$ и через $M(C)$ нижнюю и верхнюю границы значений непрерывной функции $\alpha(t)$, когда t описывает в положительном направлении кривую C.*

Пусть D произвольная односвязная область в плоскости z и пусть Γ есть граница D.

Определение 1. Мы скажем, что D (или Γ) принадлежит классу $R(m, M)$, если, какова бы ни была замкнутая область $\overline{D}_1$, $\overline{D}_1 \subset D$, всегда существует простая замкнутая аналитическая линия C такая, что: 1) область, ограниченная кривой C, содержит $\overline{D}_1$, 2) $m \leqslant m(C)$, $M \geqslant M(C)$.

Нетрудно убедиться, что всякая выпуклая область принадлежит классу $R(0, 3\pi)$, что всякая звездная область принадлежит классу $R(-\pi, 3\pi)$.

Определение 2. Пусть A есть точка Γ. Мы скажем, что точка A достижима углом, если существует сектор с вершиной в A и принадлежащий D.** Мы скажем, что точка A достижима отрезком, если существует прямолинейный отрезок $\overline{AB}$ с концом A, принадлежащий D.

Применяя теорему Фату о существовании предельных значений функции правильной и граниченной в единичном круге, нетрудно получить следующий результат.

Теорема 1. Если область D принадлежит классу $R(m, \infty)$, $m > -\infty$, или классу $R(-\infty, M)$, $M > \infty$, то при конформном отображении области D на круг имеем: 1) множеству точек границы D, не достижимых углами, отвечает на окружности множество меры нуль; 2) множеству точек границы D, образующих множество линейной меры нуль, отвечает на окружности множество меры нуль.

Рассматривая области класса $R(m, M)$, $m > -\infty$, $M < \infty$, можно получить следующий более точный результат.

Теорема 2. Пусть Γ есть граница односвязной области D, принадлежащей классу $R(m, M)$, $m > -\infty$, $M < \infty$, и пусть E есть множество точек Γ, которые можно заключить в конечную систему кругов, сумма диаметров которых не больше ε, $\varepsilon > 0$. Если D содержит круг $|z| < 1$, то, при конформном отображении, $w = f(z)$, $f(0) = 0$, D на круг $|w| < 1$,

* За начальное значение $\alpha(t)$ принимается угол, заключенный между 0 и π.

** Это определение принадлежит В. Н. Вениаминову (1).

множеству E отвечает на окружности $|w|=1$ множество ε меры не больше $2\pi\varepsilon^{\delta}$, где δ положительная константа, зависящая только от m и M.*

Мне кажется вероятным, что теорема сохраняет силу, если вместо класса $R(m, M)$ взять класс $R(m, \infty)$, $m > -\infty$.

2. Заметим, что не только теорема 2, но и теорема 1 теряют силу, если вместо класса $R(m, M)$ взять класс $R(-\infty, \infty)$ (совокупность всех односвязных областей).**

Теорема 3. Существует такая область Иордана D_1 и на границе D_1 такое множество E линейной меры нуль, что, при конформном отображении области D_1 на круг, множество E переходит в множество положительной меры.

Теорема 4. Существует такая область Иордана D_2, что, при конформном отображении D_2 на круг, множество точек границы D_2, достижимых отрезками, переходит в множество меры нуль.***

3. Отметим в заключение еще два результата, касающиеся вопроса о соответствии границ в случае, когда Γ есть спрямляемая кривая.

Теорема 5.**** Пусть D содержит круг $|z|<1$ и пусть Γ — граница D — есть спрямляемая кривая длины l. В таком случае, при конформном отображениии, $w=f(z)$, $f(0)=0$, D на круг $|w|<1$, множеству E, $\operatorname{mes} E=0$, границы Γ, отвечает на окружности множество $\mathcal{E}$,

$$\operatorname{mes} \varepsilon < \frac{Kl}{|\log \varepsilon| + 1}\cdot$$

где K есть абсолютная константа.

Теорема 6. Если в условиях теоремы 5 дополнительно допустить, что, какова бы ни была дуга γ, $\gamma \subset \Gamma$, отношение длины γ к ее диаметру не больше p, $p>0$, тогда, при конформном отображении, $w=f(z)$, $f(0)=0$, D на круг множеству E, $\operatorname{mes} E<\varepsilon$, отвечает на окружность множество $\mathcal{E}$,

$$\operatorname{mes} \mathcal{E} < 2\pi\varepsilon^{\delta},$$

где δ зависит только от p.

Институт математики и механики
Московского государственного
университета.

Поступило
1 XII 1934.

MATHÉMATIQUES

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS UNIVALENTES

Par M. LAVRENTJEV

(*Présenté par N. Lusin, de l'Académie, le 1. XII. 1934*)

Le but de cette Note est d'indiquer quelques résultats sur la correspondance des frontières dans la représentation conforme d'un domaine simplement connexe sur un cercle.

1. Introduisons quelques définitions géométriques. Soit C une courbe simple, fermée et analytique, contenue dans le plan $z=x+iy$, t étant un point quelconque de C, désignons par $\alpha(t)$ l'angle formé par l'axe réel et la

* Множество E имеет линейную меру нуль, если, каково бы ни было число η, $\eta>0$, существует конечная система кругов, покрывающих E, с суммой диаметров, равной η.

** Невозможность этого обобщения для второй части теоремы 1 была указана В. Н. Вениаминовым (2).

*** Проблема о существовании области D_2 была поставлена акад. Н. Н. Лузиным.

**** Это предложение является обобщением одной теоремы акад. Н. Н. Лузина-И. И. Привалова: если $\operatorname{mes} E=0$, то $\operatorname{mes} \mathcal{E}=0$.

tangente T de C menée par le point t. Désignons par $m(C)$ et $M(C)$ respectivement la borne inférieure et la borne supérieure des valeurs de la fonction continue $\alpha(t)$ quand t décrit C dans le sens positif.*

Soit D un domaine simplement connexe et soit Γ la frontière de D.

Définition 1. Nous disons que Γ (ou D) appartient à la classe $R(m, M)$ si, quel que soit le domaine fermé $\overline{D}_1$, $\overline{D}_1 \subset D$, il existe une courbe simple fermée analytique C, telle que 1) le domaine limité par C contienne D_1, 2) $m \leqslant m(C)$, $M \geqslant M(C)$.

Il est facile de voir que chaque domaine convexe appartient à la classe $R(0, 3\pi)$ et que chaque domaine étoilé appartienne à la classe $R(-\pi, 3\pi)$.

Définition 2. Nous disons que le point A de Γ est atteint par un angle s'il existe un secteur contenu dans D et dont le sommet soit au point A.**

Nous disons que le point A est atteint par un segment, s'il existe un point B tel que l'intervalle $|\overline{AB}|$ appartienne à D.

En appliquant le théorème connu de Fatou sur l'existence des valeurs limites d'une fonction quelconque régulière et bornée dans le cercle unité, il est facile de démontrer la proposition suivante:

Théorème 1. Si la frontière Γ d'un domaine simplement connexe D appartient à la classe $R(m, \infty)$, $m > -\infty$, alors dans la représentation conforme de D sur un cercle: 1) à l'ensemble des points de Γ qui ne sont pas atteints par des angles, il correspond sur la circonférence un ensemble de mesure nulle, 2) à l'ensemble des points de Γ qui forment un ensemble de mesure linéaire nulle, il correspond sur la circonférence un ensemble de mesure nulle.

En considérant des domaines de la classe $R(m, M)$, $m > -\infty$, $M < \infty$, on peut obtenir une proposition plus précise.

Théorème 2. Si Γ appartient à la classe $R(m, M)$, si D contient le cercle $|z| < 1$ et si la mesure linéaire d'un ensemble E de Γ est plus petite que ε,*** $\varepsilon > 0$, alors dans la représentation conforme $w = f(z)$, $f(0) = 0$, du domaine D sur le cercle $|w| < 1$ à l'ensemble E il correspond sur la circonférence $|w| = 1$ un ensemble de mesure plus petite que $2\pi\varepsilon^{\delta}$ où δ ne dépend que de m et M, $0 < \delta$.

2. Remarquons qu'on ne peut pas généraliser le théorème 1 ni, *a fortiori*, le théorème 2, en remplaçant la classe $R(m, M)$ par la classe $R(-\infty, \infty)$ (tous les domaines étant simplement connexes).****

Théorème 3. Il existe un domaine Jordanien D_1 et un ensemble E de mesure linéaire nulle, appartenant à la frontière de D_1, tels que dans la représentation conforme de D_1 sur un cercle à l'ensemble E il corresponde un ensemble de mesure positive.

Théorème 4. Il existe un domaine Jordanien D_2 tel que dans la représentation conforme de D_2 sur un cercle à l'ensemble des points qui sont atteints par les segments, il corresponde sur la circonférence un ensemble de mesure nulle.*****

* Pour la valeur initiale de $\alpha(t)$ on prend l'angle qui est compris entre 0 et π.

** Cette définition appartient a V. Veniaminoff (1).

*** La mesure linéaire de E est plus petite que ε s'il existe un ensemble fini de cercles $\{c_k\}$ tels que 1) chaque point de E appartienne à c_k, 2) la somme des diamètres des c_k soit plus petite que ε. L'ensemble E a la mesure linéaire nulle, si quel que soit ε, $\varepsilon > 0$, la mesure linéaire de E est plus petite que ε.

**** L'impossibilité de cette généralisation pour la deuxième partie du théorème 1 à été indiquée par V. Veniaminoff (2).

***** Le problème de l'existence du domaine D_2 à été posé par N. Lusin.

3. En considérant, au lieu des classes $R(m, M)$, des domaines bornés par des courbes rectifiables on peut obtenir des théorèmes analogues au théorème 2.

Théorème 5.* Si D contient le cercle $|z|<1$ et Γ est une courbe rectifiable, dont la longueur ne dépasse pas l, alors dans la représentation conforme $w=f(z)$, $f(0)=0$ de D sur le cercle $|w|<1$ à l'ensemble E de Γ, mes $E \leqslant \varepsilon$ il correspond sur $|w|=1$ un ensemble $\mathcal{E}$,

$$\operatorname{mes} \mathcal{E} < \frac{Kl}{|\log \varepsilon| + 1},$$

où K est une constante absolue.

Théorème 6. Si dans les conditions du théorème 5 nous supposons d'ailleurs que quel que soit l'arc γ de Γ le rapport de la longueur de cet arc à son diamètre est inférieur à p, $p>0$, alors dans la représentation conforme $w=f(z)$, $f(0)=0$ de D sur le cercle $|w|<1$ à l'ensemble E de Γ, mes $E \leqslant \varepsilon$ il correspond sur $|w|=1$ un ensemble $\mathcal{E}$,

$$\operatorname{mes} \mathcal{E} < 2\pi\varepsilon^{\delta},$$

où δ ne dépend que de p.

Institut de Mathématiques et de Mécanique de l'Université Moscou.

Manuscrit reçu le 1. XII. 1934.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — LITTÉRATURE CITÉE

1 V. Veniaminoff. C. R., t. 180, p. 114. 2 Ibidem, p. 115.

МАТЕМАТИКА

О. К. ЖИТОМИРСКИЙ

О КЛАССИФИКАЦИИ КУБИЧЕСКИХ ФОРМ

(*Представлено академиком И. М. Виноградовым 2 XII 1934*)

Результаты Эйзенштейна (1) и Арндта (2) относительно связи задачи классификации кубических форм с задачей утроения квадратичных форм могут быть получены методами геометрии чисел. Арифметическая и алгебраическая природа вопроса выясняется при этом гораздо глубже, чем с помощью элементарных методов.

§ **1.** Класс φ кубических форм.

$$f(X_1 Y) = a_0 X^3 + a_1 X^2 Y + a_2 X Y^2 + a_3 Y^3$$

с целыми рациональными коэффициентами и отличным от нуля дискриминантом d может быть представлен геометрически следующим образом. Выберем из класса φ такую форму $f(X, Y)$, для которой $a_0 \neq 0$, $a_3 \neq 0$. Пусть будут α, β, γ корни уравнения $f(U, 1)=0$ в каком-нибудь определенном порядке. Положим

$$x_1 = a_0\alpha, \quad y_1 = \alpha_0\beta, \quad z_1 = \alpha_0\gamma; \quad x_2 = -a_3:\alpha, \quad y_2 = -\alpha_3:\beta, \quad z_2 = -a_3:\gamma;$$
$$x = x_1 X + x_2 Y + Z, \qquad y = y_1 X + y_2 Y + Z, \qquad z = z_1 X + z_2 Y + Z,$$

где X, Y, Z — всевозможные целые рациональные числа. Совокупность точек (x, y, z) образует тогда трехмерное кольцо A, если за определение сложения и умножения точек примем формулы

$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x+x', y+y', z+z');$$
$$(x, y, z)(x', y', z') = (xx', yy', zz').$$

* Cette proposition est une généralisation d'un théorème de N. Lusin et J. Privalov si mes $E=0$ alors mes $\mathcal{E}=0$.