SUR LA REPRESENTATION CONFORME

M. Lavrentieff

[Institut de mathématique et méchanique de l'université]

Le but de cette note est d'indiquer quelques propriétés des fonctions analytiques et de faire une application à la correspondance des frontières dans la représentation conforme.

1. LEMME FONDAMENTAL. Soit D_0 et D_1 deux domaines simplement connexes sans point commun contenus dans le plan de la variable $z=x+iy$. Supposons que D_0 contient le point z_0 et D_1 contient z_1. Réalisons par les fonctions $f_0(z)$ et $f_1(z)$ les représentations conformes des domaines D_0 et D_1 sur le cercle $|w|<1$, $w=u+iv$, de telle manière que $f_0(z_0)=f_1(z_1)=0$. Alors on a

$$|f_0'(z_0)|\cdot|f_1'(z_1)|\geqslant\frac{1}{|z_1-z_0|^2},$$

l'égalité a lieu si D_0 et D_1 sont des demiplans complémentaires définis par la droite

$$\left|\frac{z-z_0}{z_1-z}\right|=1.$$

La démonstration de ce lemme n'est pas compliquée. Nous le démontrons en faisant varier les frontières de D_0 et D_1.

On peut déduire de ce lemme le théorème connu de MM. Koebe et Bieberbach:

Soit D un domaine simplement connexe contenant le point $z=0$ et dont la frontière contient le point $z=\frac{1}{4}$. Alors, si $w=f(z)$ réalise la représentation conforme du domaine D sur le cercle $|w|<1$, $f(0)=0$, nous avons:

$$|f'(0)|\geqslant 1.$$

En effet, posons $z=\frac{1}{4}-\mathfrak{z}^2$. Alors les deux branches de cette fonction réalisent les représentations conformes du domaine D sur deux domaines simplement connexes D_0 et D_1 sans point commun. Donc, pour la fonction

$$w=F(\mathfrak{z})=f\left(\frac{1}{4}-\mathfrak{z}^2\right),$$

dont les deux branches réalisent les représentations conformes des domaines D_0 et D_1 sur le cercle $|w|<1$, nous avons $F\left(\frac{1}{2}\right)=F\left(-\frac{1}{2}\right)=0$. Donc, d'après le lemme,

$$\left|F'\left(\frac{1}{2}\right)\right| \cdot \left|F'\left(-\frac{1}{2}\right)\right| \geqslant 1$$

et, en remplaçant F par f, on a

$$|f'(0)| \geqslant 1.$$

En applicant le lemme fondamental on peut démontrer de même la proposition suivante:

THÉORÈME I. 1. Soit D un domaine simplement connexeay ant les propriétés suivantes: 1) D contient les points $z=0$, z_0, z_1, où $|z_0|=|z_1|=r$. 2) Chaque courbe joignant les points z_0 et z_1 et contenue dans D coupe le segment $(-\varepsilon, +\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, de l'axe réel. Soit $w=f(z)$ la fonction qui réalise la représentation conforme du domaine D sur le cercle $|w|<1$ et telle que $f(z_0)=0$; alors

1) $1-|f(z_1)|<K_1\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)^2$, K_1 étant une constante absolue.

2) Désignons par E l'ensemble des points $\{z\}$ de la frontière de D tels que: a) chaque courbe, contenue dans D, joignant un point accessible quelconque z de E et le point z_0, coupe le segment $(-\varepsilon, +\varepsilon)$, b) quel que soit le point z de E nous avons $|z|\geqslant r$. Alors dans la représentation conforme il correspond à l'ensemble E un ensemble de la circonférence, dont la mesure est inférieure à $K_2\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)^2$, K_2 étant une constante absolue.

2. Soit D un domaine simplement connexe et F la frontière de D. Posons, les définitions suivantes:

DÉFINITION I. Soit z_0 et z_1 deux points de D. Nous appellerons *distance relative* de z_0 et z_1 la limite inférieure des longueurs des courbes contenues dans D et joignant z_0 et z_1. Nous désignons cette distance relative par $d_z(z_0, z_1)$.

DÉFINITION II. Soit z un point accessible de F. Nous dirons que le point z est atteint par un angle d'ordre α, si quel que soit un nombre positif ρ on peut toujours définir un cercle de rayon plus grand que ρ^α contenu dans D tel que la distance relative du centre et du point z soit égale à ρ.

On peut démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME II. *Dans la représentation conforme du domaine D sur le cercle $|w|<1$ à l'ensemble des points de F atteints par des angles d'ordre deux il correspond sur la circonférence $|w|=1$ un ensemble de mesure 2π* [1].

---

[1]) Ce théorème est une généralisation d'une proposition publiee dans les „Comptes rendus", p. 1407, 1927.

D'ailleurs on peut construire un domaine jordanien D, tel que dans la même représentation conforme il correspond à l'ensemble des points de F atteint par des angles du premier ordre un ensemble de mesure nulle de la circonférence [1]).

[Wissenschaftliche Berichte der Moskauer Staatsuniversität, H. II, 1934.]

О КОНФОРМНОМ ОТОБРАЖЕНИИ

М. А. Лаврентьев

[Научно-исследовательский институт математики и механики]

В настоящей заметке дается признак, которому должно удовлетворять множество точек E границы односвязной области D для того, чтобы при конформном отображении D на круг множеству E отвечало на окружности множество полной меры.

[Ученые записки МГУ, вып. II, 1934.]

[1]) Cet exemple est une généralisation d'un exemple indiqué par M. Weniaminoff.