

Н К Т П С С С Р
ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ АВИАЦИОННОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

Труды Центрального Аэро-гидродинамического Института

Выпуск 155

629

5

№155

М. А. ЛАВРЕНТЬЕВ

ОБ ОДНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ
В ТЕОРИИ КРЫЛА АЭРОПЛАНА



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА 1934 ЛЕНИНГРАД

МА РОМ
НКТН СССР
ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ АВИАЦИОННОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

Труды Центрального аэро-гидродинамического института

Выпуск 155

М. А. ЛАВРЕНТЬЕВ

ОБ ОДНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ
В ТЕОРИИ КРЫЛА АЭРОПЛАНА

Продано 1034



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА 1934 ЛЕНИНГРАД

12
РЕНО

МАШИНА
— Н. В. З. П. —

629,135 (25)

T 39-5-4

ПРОВЕРЕНО
1936 г. № 11428

~~92/74~~
~~1934~~

U S S R

HAUPTVERWALTUNG DER FLUGZEUGINDUSTRIE

Werke des Zentralen Aerohydrodynamischen Instituts

Lieferung 155

МАШИНА
ИТТ 15104

M. A. LAWRENTIEW

UEBER EINE EXTREMAUFGABE AUS DER TRAGFLÜGELTHEORIE

12019

Редакционную работу по этой книге проделал Г. А. Вольверт. Издание оформила С. Л. Дымак. Корректуру держала Э. В. Смирнова. Наблюдал за выпуском Л. М. Волжович. Рукопись едена в производство 8 июля 1933 г., листы подписаны и печатны 17 декабря 1933 г. в количестве 1000 экз. на бумаге формата 72 × 105³/₁₆, печатных знаков в книге 180980, листов 2¹/₂, заказ № 2860, ГТТИ № 87. Ленгортлит № 28645.

19/4/46

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Предлагаемая вниманию читателя работа проф. М. А. Лаврентьева является завершением длинного ряда работ, имевших в свое время большое, чтобы не сказать решающее, значение в истории аэродинамики крыла. Напомним вкратце содержание и результаты этих работ.

Первой из них было открытие акад. С. А. Чаплыгиным крыла, имеющего форму инверсии параболы, и его обтекания. Вскоре за открытием С. А. Чаплыгина проф. Жуковскому удалось дать новую интерпретацию найденного крыла. Проф. Жуковский предложил при этом общий способ получения крыльев конечной толщины, исходя от бесконечно тонких дужек. Имея некоторую дужку (основную дужку) бесконечно малой толщины, обтекание которой нам известно, мы всегда в состоянии применить к ней указанный проф. Жуковским прием одевания (оконтурирования). Получающееся при этом крыло приблизительно сохраняет очертания основной дужки — ее кривизну, длину, продолговатую форму и т. д., и проф. Жуковскому удалось доказать, что мы всегда в состоянии найти обтекающий его (это крыло) поток.

При этом обнаружилось, что дужка, указанная проф. Чаплыгиным, получается в том случае, если мы за основную бесконечно тонкую дужку возьмем дугу окружности и применим к ней прием одевания Жуковского.

Эти результаты, замечательные по своему изяществу, приобрели повсеместную известность, а само крыло, не вполне справедливо, получило наименование дужки Жуковского.

Дальнейший значительный шаг в построении теории крыла Жуковского сделали немцы, которые, проведя соответствующие испытания, показали, что для этой формы крыльев результаты, даваемые теорией, довольно хорошо совпадают с их экспериментальными свойствами.

Одновременно немцы обнаружили, что крылья Жуковского показывают выдающиеся летные свойства и отношение $k = \frac{P}{W}$ у них очень велико. Кроме того, крылья эти обладают прекрасной подъемностью, и на них мы в состоянии получить большие величины коэффициентов подъемной силы. В результате крыло, или дужка Жуковского, стало применяться в летном деле, и из него позднее был получен целый ряд производных профилей, для которых оно является прототипом. Можно даже с известным правом утверждать, что дужка Жуковского лежит в основе общепринятой формы современного крыла.

Пытались, разумеется, также отыскать формы крыльев, которые давали бы еще лучшие характеристики, чем дужки Жуковского, но попытки эти не имели особого успеха. Оказалось, что формы крыльев, развившиеся из дужки Жуковского, принадлежат к числу наилучших, и другие хорошие крылья не обнаруживают свойств, которые позволили бы отдать им безусловное предпочтение. В результате экспериментальные аэродинамические лаборатории стали на ту точку зрения, что поиски дужек с оптимальными свойствами, вообще говоря, неблагоприятная работа, так как, если в ее результате у нас и получаются иногда какие-нибудь улучшения, то выгоды от них ничтожны сравнительно с затрачиваемой на них работой. Кроме того, выгоды эти обыкновенно лежат в пределах возможных экспериментальных ошибок.

Однако за всем этим оставались невыясненными следующие важные вопросы: во-первых, было совершенно непонятно, отчего аэродинамической теории повезло

настолько, что первая же указанная ею обтекаемая дужка обнаружила свойства, хорошо совпадающие с теми, которые предугадываются теорией идеального потока; во-вторых, еще меньше мы в состоянии объяснить, почему дужка эта оказалась принадлежащей к разряду невыгоднейших.

Вообще говоря, из того, что мы умеем найти обтекание дужки, вовсе не следует, что дужка эта выгодна в практическом отношении, так как качество дужки зависит прежде всего от ее работы в вязком потоке.

Случай с дужкой Жуковского является поэтому счастливым случаем, требующим объяснения.

Найти объяснение тем более желательно, что удача с дужкой Жуковского породила среди отдельных инженеров мысль, что, вообще говоря, если дужка обтекаема, т. е. если мы умеем найти для нее обтекание, то она выгодна.

Неверность этой мысли очевидна, так как, теоретически говоря, необтекаемых дужек нет и для всякой дужки можно найти обтекание ее идеальным потоком. Наше же неумение решить эту задачу является всегда лишь чисто временным затруднением, основанным на недостаточном развитии математического анализа.

Точно так же далеко не все крылья имеют свойства, которые указываются теорией идеального потока, и дужка Жуковского является исключением также и в этом отношении.

Впрочем, мы можем считать, что совпадение полученных для нее экспериментальным путем коэффициентов подъемной силы с теми, которые предвычислены теоретически, объясняются хорошими свойствами дужки, ибо, чем лучше дужка, т. е. чем меньше создаваемые ею потери в вязком потоке, тем меньше должны отличаться и экспериментальные свойства ее от тех, которые она обнаружила бы в потоке идеальной жидкости.

Таким образом из двух поставленных нами выше вопросов остается один: почему дужка Жуковского выгодна?

Конечно, имеет значение также и то обстоятельство, что форма эта удовлетворяет основным условиям, выполнение которых требуется от хорошей формы крыла. Она представляет собою продолговатое, сравнительно узкое тело и, за исключением двух концов, переднего и заднего, не имеет на своем контуре точек с большей кривизной. Однако выполнение только этих условий является далеко не достаточным, и поставленный нами вопрос остается в силе. Его можно расчленил следующим образом:

- 1) удачно ли выбрана основная дужка, к которой применен прием Жуковского;
- 2) целесообразен ли с гидравлической точки зрения самый процесс одевания Жуковского.

Вторую часть вопроса мы имеем все основания считать менее насущной, так как в этом отношении могут быть найдены некоторые объяснения.

Необходимость одевания дужки следует из того, что при этом, благодаря округлению переднего конца, устраняется опасность срывов потока на этом конце.

В защиту же самой формы дужки можно привести то соображение, что она может быть получена нами при помощи метода вытеснения обтекающего крыло плоско-параллельного потока другим вспомогательным потоком¹⁾. Правда, при этом приходится располагать поток не просто на плоскости, а на римановой поверхности (двойчатке). Главный поток, обтекающий крыло, происходит на одном листе двойчатки, а вытесняющий его вспомогательный поток задается некоторым диполем и вихрем, расположенными в одной и той же точке, которая находится на втором листе (римановой двойчатки).

Соответственно сказанному второй поток совершается, главным образом, внутри второго листа, и только отдельные (немногочисленные по расходу) его струи попадают через связывающую листы накрест друг с другом купюру в плоскость первого листа.

Эти последние струи омывают в области первого листа небольшую область, которая и представляет собой крыло Жуковского.

¹⁾ См., например, „Труды ЦАГИ“, вып. 68; П. Вальтер, Основание гидродинамической теории камер, подводных воздух к турбине, ч. III, стр. 13—14.

Таким образом очертания одевающего основную дужку профиля в случае крыла Жуковского выбраны произвольно, как это получилось бы, например, если бы мы поставили в поток некоторое твердое тело и, таким образом, жестко изменили бы форму его струй. В данном случае мы действуем на поток не при помощи твердых перегородок, а при помощи другой движущейся жидкой массы — элемента податливого и не могущего с произвольной силою воздействовать на соседний поток, но только ставящего ему некоторые ограничения.

Короче говоря, границу течения — дужку — мы задаем не по своему усмотрению, а так, как их выбирает свободно протекающий, непринужденный поток, образованный комбинацией двух составляющих его течений.

В гидравлической практике давно установилось правило, согласно которому очертания стенок, направляющих поток, следует выбирать, считаясь с внутренней механикой потока и по возможности соблюдая собственные его направления. На основании того, что нами только что сказано, следует, что правило это вполне соблюдается приемом одевания основной дужки, предложенным Жуковским.

Кроме того, можно доказать, что, вообще говоря, свойства крыла Жуковского очень мало отличаются от свойств основной дужки (т. е. от свойств дуги окружности, работающей как крыло), если только при обтекании последней не возникает отрывов на переднем конце, о которых мы уже говорили. Вывод этот, полученный одновременно и теоретически и экспериментально, является истиной — и хорошо доказанной, и вполне для нас понятной¹⁾.

Таким образом объяснения удивительных свойств крыла Жуковского необходимо искать, прежде всего, в свойствах его основной дужки.

В связи со сказанным, приобретает значение результат, полученный проф. Лаврентьевым в предлагаемой вниманию читателя работе, где обнаруживается, что эта основная дужка — дужка окружности — обладает вариационными свойствами и является для данной длины и для заданного максимума кривизны наилучшей, в смысле величины подъемной силы, дужкой.

Открытие это прекрасно завершает цепь работ, перечисленных выше, объясняя нам удивительные до сих пор свойства дужки Жуковского.

В самом деле, так как нет никаких оснований предполагать, что дужка Жуковского будет создавать сопротивление большее, чем другие достаточно плавные по своим очертаниям дужки²⁾, и так как у этой дужки величина подъемной силы P при прочих равных условиях больше, чем у остальных, то, очевидно, мы имеем полное объяснение того, почему качество дужки Жуковского, т. е. величина отношения $\frac{P}{W}$ больше, чем у других крыльев.

Второе же свойство дужки — ее большая летучесть (или большая величина коэффициента подъемной силы C_y) — не требует даже никаких пояснений, так как непосредственно вытекает из самого заголовка теоремы, доказанной проф. Лаврентьевым.

Учение о крыле Жуковского, таким образом, должно с настоящего времени войти во все курсы аэродинамики в качестве примера, где достигнуто полное понимание существа вопроса и наилучшее осуществление всегда желательного для нас синтеза двух обычно отрицающих друг друга начал — теории и эксперимента.

П. Вальтер.

¹⁾ См. „Труды ЦАГИ“, Первая Всесоюзная конференция по аэродинамике, 1931, стр. 32. Статья А. П. Оглобина, Сравнительный анализ продувок дужек по данным геттингенской лаборатории и лаборатории ЦАГИ.

Ср. также: B l e n k. Der Eindecker als tragende Wirbelfläche. „Z. f. ang. Math. u. Mech.“, 1925, S. 36.

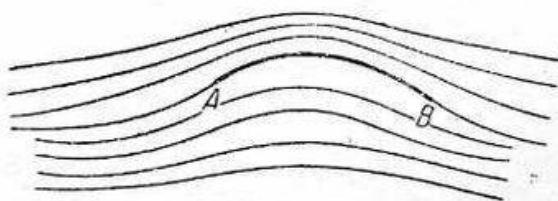
²⁾ Величина W после исключения из нее индуктивного сопротивления оказывается величиной почти постоянной для различных дужек одной толщины, исполненных из одного материала и имеющих одинаковую обработку стенок.

Пусть дана простая спрямляемая дуга AB (черт. 1) длиной не больше l и кривизна которой в каждой точке не превосходит число K . Допустим, кроме того, что дугу AB обтекает плоско-параллельный поток идеальной несжимаемой жидкости при следующих условиях: 1) точками разветвления и схода потока являются соответственно точки A и B ; 2) скорость потока в бесконечности равна V_∞ .

Главной целью настоящего исследования является доказать следующую теорему:

ТЕОРЕМА I. Если $K < \frac{c}{l}$, то среди всех дуг AB , обладающих указанными выше свойствами, наибольшей подъемной силой обладает дуга окружности радиуса $\frac{1}{K}$ и длины l , где c — константа, которую можно принять равной: $c = \frac{1}{21}$ ¹⁾.

Прежде чем приступить к доказательству этой теоремы, мы установим несколько вспомогательных предложений, которые могут иметь также значение при решении других аналогичных экстремальных задач в теории плоско-параллельного потока. Целью этих лемм является выяснить влияние различных вариаций обтекаемого контура на подъемную силу этого контура.



Черт. 1.

1. Допустим, что плоский поток с заданной по величине скоростью в бесконечности V_∞ обтекает контур $AaBbA$ (контур C)²⁾

при условии, что точкой разветвления потока является точка A и точкой схода является точка B ³⁾.

Ради большей простоты изложения условимся в дальнейшем подъемной силой контура $AaBbA$ называть равнодействующую сил давления потока на контур, взятую со знаком $+$, если при конформном отображении области течения на внешность круга радиуса единица (бесконечно удаленные точки соответствуют друг другу) дуге AaB отвечает на окружности дуга длины больше π , и взятую со знаком $-$, если отмеченная дуга окружности окажется по длине меньше π . Будем также для краткости через D_c обозначать область течения.

При этих обозначениях докажем следующую лемму.

Лемма I. Пусть обтекаемый потоком контур $AaBbA$ обладает положительной подъемной силой. При этом условии, если в обтекаемом контуре дугу AaB или часть этой дуги заменить дугой, целиком принадлежащей D_c , то новый контур C_1 будет обладать большей подъемной силой, и если дугу BbA или часть этой дуги заменить дугой, целиком принадлежащей D_c , то новый контур C_2 будет обладать меньшей подъемной силой⁴⁾ (черт. 2).

¹⁾ Не меняя хода доказательства, но уточняя приведенные ниже подсчеты, значение константы c можно увеличить в два-три раза. Кроме того, применением тех же методов нетрудно показать, что при значениях c , близких к 2π , теорема не верна.

²⁾ Контур $AaBbA$ есть простая замкнутая линия. Кроме того, во всем дальнейшем мы будем предполагать, что обтекаемые дуги и контуры состоят из конечного числа дуг с ограниченной кривизной. Хотя некоторые предложения могут быть обобщены на более общие случаи, но мы их сознательно отбрасываем, ибо иначе задачи теряют гидродинамический смысл.

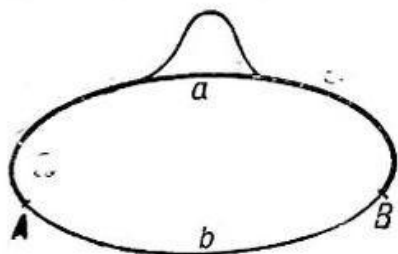
³⁾ Как известно, каков бы ни был контур и каковы бы ни были точки A и B , такой поток существует и этими данными определяясь единственным образом.

⁴⁾ Здесь, как было отмечено выше, при расчете подъемной силы деформированного контура предполагается, что 1) скорость потока в бесконечности по величине не меняется и 2) точками разветвления и схода потока все время остаются соответственно точки A и B .

Замечание. Лемма остается в силе также тогда, когда обтекаемый контур содержит точки, достижимые неприводимыми один к другому путями (когда, например, обтекаемый контур есть простая дуга с концами A и B). В этом случае надо только *каждую дугу, состоящую из таких точек, мыслить как двойную.*

Доказательство. Пусть $w = f(z)$ есть функция, реализующая конформное отображение области течения, обтекающего контур C , на внешность круга $|w| \leq 1$ и такая, что $f(\infty) = \infty$. Обозначим через 2θ длину дуги окружности, соответствующую при этом отображении дуге AaB . При этих обозначениях, в силу известной формулы Жуковского, подъемная сила контура C будет равна:

$$P = \frac{4\pi V_\infty \rho \cos \theta}{|f'(\infty)|},$$



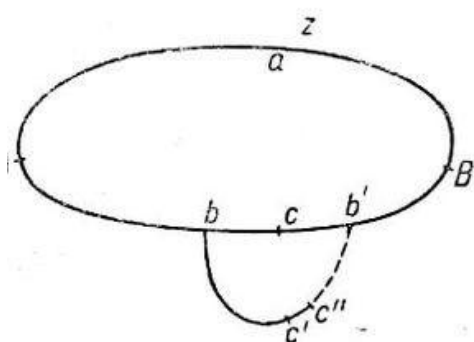
Черт. 2.

где ρ — плотность среды. Так как величины V_∞ и ρ постоянны, то доказательство нашей леммы сводится к следующему: показать, что выражение

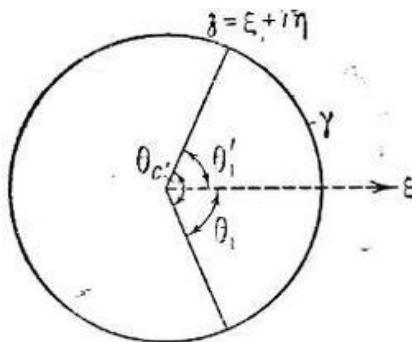
$$P_1 = \frac{\cos \theta}{|f'(\infty)|} \quad (A)$$

при указанных деформациях обтекаемого контура соответственно в первом случае увеличивается и во втором случае уменьшается.

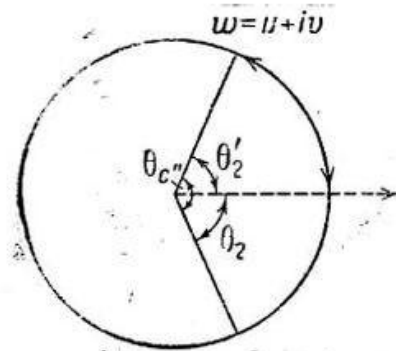
Увеличение P_1 при деформации дуги AaB (черт. 2) вытекает непосредственно из известных принципов Lindelöf'a и Montel'я¹⁾. В самом деле, при указанной деформации дуги AaB , с одной стороны, в силу принципа Lindelöf'a $|f'(\infty)|$ уменьшается, с другой стороны, в силу принципа Montel'я угол θ уменьшается, следовательно, $\cos \frac{\theta}{2}$ увеличивается, что и доказывает первую часть леммы.



Черт. 3а.



Черт. 3б.



Черт. 3с.

Докажем вторую часть леммы (черт. 3). В силу известных свойств конформных отображений, если $|f'(\infty)|$ и θ рассматривать как функции линии $AaBbA$, то эти функционалы будут непрерывны, следовательно, нашу лемму достаточно доказать для случая, когда произвольная часть дуги AaB , пусть bcb' будет заменена дугой

¹⁾ Ввиду основного значения этих принципов для всего дальнейшего приведем их формулировки.

Пусть D и D' — две области, ограниченные простыми замкнутыми линиями Jordan'a Γ и Γ' и принадлежащие плоскости z ; допустим, что: 1) D' содержится в D , 2) Γ и Γ' имеют общую дугу a_1b_1 . Обобразим конформно области D и D' на круг $|w| < 1$, так что точке $w = 0$ отвечает одна и та же точка z_0 в D и D' . Пусть $\alpha\beta$ и $\alpha'\beta'$ — дуги окружности $|w| = 1$, которые соответствуют при отображениях дуге ab , содержащейся в дуге a_1b_1 . При этих условиях имеем:

1) принцип Lindelöf'я: производная $\left| \frac{dw}{dz} \right|_{z=s_0}$ при отображении D на круг будет не больше, чем производная $\left| \frac{dw}{dz} \right|_{z=s_0}$ при отображении D' на тот же круг;

2) принцип Montel'я: длина дуги $\alpha\beta$ не меньше длины дуги $\alpha'\beta'$.

$bc'b'$, обладающей непрерывно вращающейся касательной и образующей в точках b и b' с дугой $bc'b'$ прямые углы. Обозначим продеформированный контур через C' .

Возьмем теперь на дуге $bc'b'$ произвольную точку — пусть это будет точка c' — и рассмотрим подъемную силу вспомогательного контура, состоящего из первоначального контура $AaBbA$ и дуги bc' . В силу формулы (A) и свойств конформных отображений, подъемная сила контура будет непрерывной функцией точки c' , причем когда c' совпадет с точкой b , то построенный контур совпадет с контуром C , и его подъемная сила будет равна подъемной силе недеформированного контура. С другой стороны, когда точка c' неограниченно приближается к точке b' , то подъемная сила нашего контура стремится к подъемной силе контура C' . Обозначим через D_c область, занятую потоком, обтекающим вспомогательный контур. Отобразим конформно область $D_{c'}$ на внешность круга $|w| \leq 1$ при условии, что бесконечно удаленные точки соответствуют друг другу. Пусть

$$w = f_{c'}(z)$$

есть функция, реализующая это отображение, и пусть $2\theta_{c'}$ — длина дуги окружности, соответствующая при этом отображении дуге $Abc'bb'B$. В силу отмеченных свойств подъемной силы вспомогательного контура, если через c'' обозначить точку дуги $bc'b'$, лежащую между точками c' и b' , для доказательства леммы достаточно доказать следующее неравенство:

$$\frac{1}{|f'_{c''}(\infty)|} \cos \theta_{c''} < \frac{1}{|f'_{c'}(\infty)|} \cos \theta_{c'}$$

При доказательстве этого неравенства мы можем предполагать, что точка c'' бесконечно близка к точке c' , и, в соответствии с этим, все вычисления будем вести, пренебрегая бесконечно малыми высших порядков.

Введем вспомогательное комплексное переменное $\xi = \rho e^{i\theta}$.

Отобразим конформно область $D_{c'}$ на внешность круга $|\xi| \leq 1$ при условиях соответствия бесконечно удаленных точек и точек c' , $\xi = 1$ границ. Пусть

$$\xi = f_1(z)$$

есть функция, реализующая это отображение, и обозначим через θ_1 и θ'_1 модули аргументов точек A' , B' окружности, соответствующих точкам A и B . При этом отображении бесконечно малой дуге $c'c''$ отвечает на плоскости ξ бесконечно малая дуга γ , выходящая из точки $\xi = 1$ ортогонально к окружности $|\xi| = 1$.

Область, получаемую из области $|\xi| > 1$ удалением дуги γ , отобразим конформно на внешность круга $|w| \leq 1$ при условиях соответствия бесконечно удаленных точек и точек $\xi = -1$ и $w = -1$. Пусть

$$w = f_2(\xi)$$

есть функция, реализующая это отображение. Обозначим через θ_2 и θ'_2 модули аргументов точек, соответствующих точкам A' и B' .

При этих обозначениях будем иметь:

$$w = f_{c'}(z) = f_1(z),$$

$$w = f_{c''}(z) = f_2[f_1(z)],$$

следовательно,

$$|f'_{c''}(\infty)| = |f'_1(\infty)| \cdot |f'_2(\infty)|,$$

$$2\theta_{c''} = \theta'_1 + \theta'_2,$$

$$2\theta_{c'} = \theta_2 + \theta'_2,$$

причем, в силу условий доказываемой леммы

$$0 < 2\theta_{c'} < \pi,$$

значит

$$0 < \theta_1 + \theta'_1 < \pi. \quad (a)$$

Таким образом наша задача приводится к изучению $|f_2'(\infty)|$, $\theta_2 - \theta_1$ и $\theta_2 - \theta_1$. Для этой цели, пренебрегая бесконечно малыми высших порядков, будем считать, что криволинейный отрезок γ есть отрезок оси x , тогда функция $f_2(\delta)$ может быть выражена элементарно:

$$(1+h)\left(\omega + \frac{1}{\omega}\right) + 2h = \delta + \frac{1}{\delta},$$

где h — бесконечно малая.
Следовательно,

$$|f_2'(\infty)| = \frac{1}{1+h}.$$

Кроме того, полагая $\delta = e^{i\theta_2}$ и $\omega = e^{i\theta_1}$, получим:

$$2(1+h) \cos \theta_2 + 2h = 2 \cos \theta_1.$$

Отсюда, обозначая бесконечно малую величину $\theta_2 - \theta_1$ через $\Delta\theta$ и отбрасывая бесконечно малые высших порядков, получим:

$$h \cos \theta_1 - \sin \theta \Delta\theta_1 + h = 0$$

или

$$\Delta\theta = h \operatorname{ctg} \frac{\theta_1}{2}.$$

Следовательно, опять отбрасывая бесконечно малые высших порядков, имеем:

$$\frac{1}{\cos \frac{\theta_1 + \theta_1'}{2}} \left[\cos \frac{\theta_2 + \theta_1'}{2} - \cos \frac{\theta_1 + \theta_1'}{2} \right] = -\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\theta_1 + \theta_1'}{2} \left(\operatorname{ctg} \frac{\theta_1}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\theta_1'}{2} \right) h = -\mu h,$$

где положено:

$$\frac{1}{2} \frac{\left(\operatorname{ctg} \frac{\theta_1}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\theta_1'}{2} \right)^2}{\operatorname{ctg} \frac{\theta_1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\theta_1'}{2} - 1} = \mu.$$

В силу (а):

$$\operatorname{ctg} \frac{\theta_1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\theta_1'}{2} - 1 > 0.$$

Следовательно, $\mu > 0$, кроме того, легко подсчитать, при всех значениях θ_1 и θ_1' , $\theta_1 + \theta_1' < \pi$, имеем:

$$\mu > 1,$$

отсюда

$$\cos \theta_{c''} = \cos \frac{\theta_2 + \theta_2'}{2} = \cos \frac{\theta_1 + \theta_1'}{2} (1 - \mu h) = \cos \theta_{c'} (1 - \mu h).$$

Таким образом окончательно:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|f_{c''}'(x)|} \cos \theta_{c''} &= \frac{1+h}{|f_{c'}'(x)|} \cos \theta_{c'} (1 - \mu h) = \\ &= \frac{\cos \theta_{c'}}{|f_{c'}'(\infty)|} [1 - (\mu - 1)h] < \frac{1}{|f_{c'}'(\infty)|} \cos \theta_{c'}. \end{aligned}$$

Из доказанной леммы получается непосредственно следующий результат:

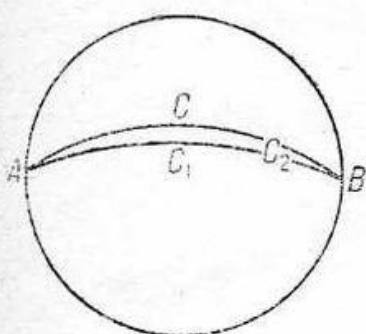
Среди всех дуг ограниченной кривизны (кривизна в каждой точке не больше K), соединяющих две данные точки A и B , $\overline{AB} > \frac{2}{K}$ и принадлежащих кругу с диаметром AB , наибольшей подъемной силой обладает дуга окружности радиуса $\frac{1}{K}$.

Для доказательства соединим точки A и B дугой C с постоянной кривизной K (черт. 4), принадлежащей кругу с диаметром AB . Кроме того, проведем в том

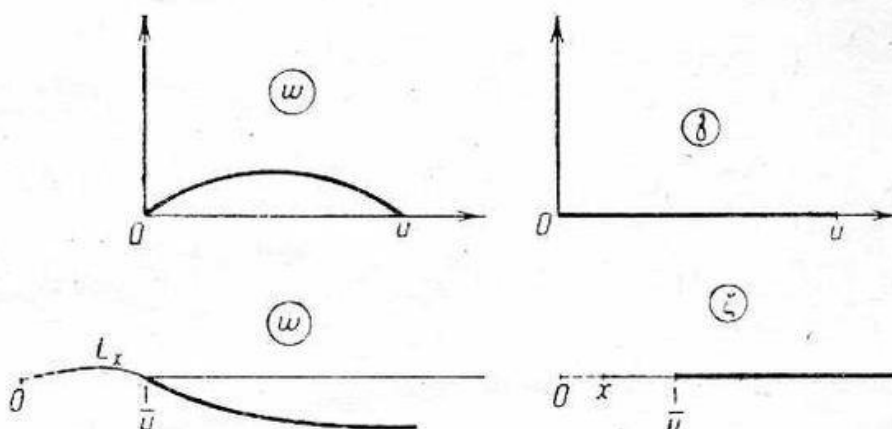
же круге произвольную дугу C_1 кривизны не больше K , соединяющую точки A и B .

Считая подъемную силу дуги C положительной, докажем, что подъемная сила C больше подъемной силы C_1 . Для этой цели разобьем переход от дуги окружности C к дуге C_1 на две части (черт. 4): 1) перейдем от дуги C_1 к контуру C_2 , составленному из дуг C и C_1 ; предполагая, что точками схода и разветвления потока остаются точки A и B , в силу леммы подъемная сила контура C_2 будет больше подъемной силы дуги C_1 , так как в силу условий дуга C_1 расположена с вогнутой стороны дуги C ; 2) переходим от контура C_2 к дуге окружности C ; в силу той же леммы при этом переходе подъемная сила также увеличивается. Этим предложение доказано.

2. Возвращаясь к основной задаче, имеем: в силу основной леммы сделанным выше построением доказывається, что среди дуг, определенных в условиях основной теоремы, наибольшей подъемной силой обладает *выпуклая дуга*.



Черт. 4.



Черт. 5.

Целью дальнейших вспомогательных предложений является дать количественные оценки вариаций $|f'(\infty)|$ и $\cos \theta$ при различных простейших вариациях дуги AB .

ЛЕММА II. В плоскости комплексного переменного w дана простая дуга AB , обладающая ограниченной кривизной. Удалим из плоскости w часть дуги AB , пусть AS , с концами в точках A и S и длины s , и отображим конформно полученную область D_s на внешность круга $|z| \leq 1$, при условии соответствия бесконечно удаленных точек. Обозначим через

$$w = f(z, s)$$

функцию, реализующую это отображение. При этих условиях будем иметь:

$$\frac{d}{ds} \ln |f'_z(\infty, s)| \leq \frac{1}{u}, \quad (1)$$

где u есть длина хорды, стягивающей дугу AS . Знак равенства достигается, когда AB есть отрезок прямой.

Не нарушая общности доказательства, будем предполагать, что точка A находится в начале координат и что точка S лежит на положительной части действительной оси. Обозначим через u абсциссу этой точки (черт. 5).

Введем вспомогательное комплексное переменное ζ и отображим конформно область D_s на область, получаемую выбрасыванием из плоскости ζ отрезка действительной оси, заключенного между точками $\zeta = 0$ и $\zeta = u$. Пусть при этом отображении друг другу соответствуют бесконечно удаленные точки и точки $w = u$, $\zeta = u$. Пусть, далее,

$$w = F(\zeta) \quad (2)$$

есть функция, реализующая это отображение.

Докажем, что

$$|F'(u)| \geq 1. \quad (3)$$

Для этой цели произведем предварительно преобразования отображаемых областей подстановками:

$$\zeta = \frac{1}{z},$$

$$w = \frac{1}{W}.$$

Подставляя в (2), получим:

$$\frac{1}{W} = F\left(\frac{1}{z}\right). \quad (4)$$

Так как при $\zeta = u$ имеем: $w = u$, $\zeta = \frac{1}{u}$, $W = \frac{1}{u}$, то при $\zeta = u$

$$\frac{dW}{d\zeta} = \frac{dw}{d\zeta}.$$

Следовательно, для доказательства (3) достаточно показать, что

$$\left[\frac{dW}{d\zeta}\right]_{\zeta = \frac{1}{u}} \geq 1.$$

В силу определения $F(\zeta)$ функция

$$W = F_1(\zeta) = \frac{1}{F\left(\frac{1}{\zeta}\right)}$$

обладает следующим свойством: 1) $F_1(0) = 0$, $F_1\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{1}{u}$ и 2) функция $W = F_1(\zeta)$ дает конформное отображение области, получаемой выбрасыванием из плоскости ζ положительного куска действительной оси $\left(\frac{1}{u}, \infty\right)$, на область, получаемую выбрасыванием из плоскости W криволинейного луча концами в точках $\frac{1}{u}$ и ∞ .

Заметив это, допустим от противного, что при $\zeta = \frac{1}{u}$

$$dW < d\zeta.$$

Соединим в плоскости ζ точку $\zeta = \frac{1}{u}$ с точкой $\zeta = x < \frac{1}{u}$, действительной оси, отрезком прямой. Этому отрезку, в силу отображения $W = F(\zeta)$, будет отвечать в плоскости W кривая L_x , выходящая из точки $W = \frac{1}{u}$. Обозначим через σ длину этой кривой. Имеем:

$$\frac{d\sigma}{dx} = \left| \frac{dW}{d\zeta} \right|.$$

Отсюда, в силу гипотезы, при достаточно малых x ,

$$\sigma < x.$$

С другой стороны, в силу теоремы Кюбе-Виебербах'а, если $\sigma < x$ (модуль W соответствующего концу кривой L_x меньше x), то

$$\left| \frac{dW}{d\zeta} \right|_{\zeta=x} = \frac{d\sigma}{dx} < 1.$$

Следовательно, при $0 < x \leq \frac{1}{u}$ имеем $\sigma < x$, что невозможно, ибо если $x = \frac{1}{u}$, то σ есть длина дуги, соединяющей точки $W = 0$ и $W = \frac{1}{u}$. Перейдем к доказательству основного неравенства (1). Для этой цели воспользуемся введенной выше функцией $F(\zeta)$. Имеем:

$$w = f(z, s) = F\left\{\frac{u}{4}\left(z + \frac{1}{z}\right) + \frac{u}{2}\right\}. \quad (5)$$

Выразим теперь также через $F(\zeta)$ функцию $f(Z, s + \Delta s)$. В силу соответствия $w = F(\zeta)$, бесконечно малой дуге Δs будет отвечать в плоскости ζ бесконечно малая дуга γ , выходящая из точки $(\zeta) = u$ и касательная в этой точке действительной оси. Пренебрегая бесконечно малыми высших порядков, мы будем считать, что γ есть отрезок действительной оси; пусть Δu —его длина. В силу (3) при достаточно малых Δs будем иметь:

$$\Delta s < \Delta u, \quad (6)$$

кроме того

$$f(z, s + \Delta s) = F\left\{\frac{u + \Delta u}{4}\left(z + \frac{1}{z} + \frac{u + \Delta u}{2}\right)\right\}. \quad (7)$$

Дифференцируя равенства (5) и (7) по z и полагая $z = \infty$ получим:

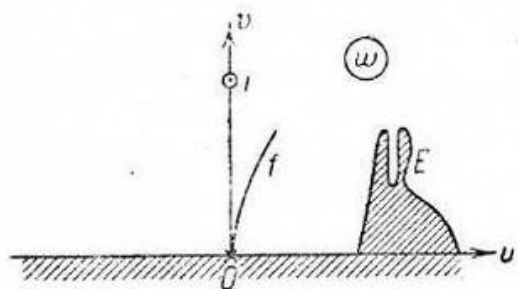
$$\left. \begin{aligned} |f'(\infty, s)| &= \frac{u}{4} |F'(\infty)|, \\ |f'(\infty, s + \Delta s)| &= \frac{u + \Delta u}{4} |F'(\infty)|. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Следовательно,

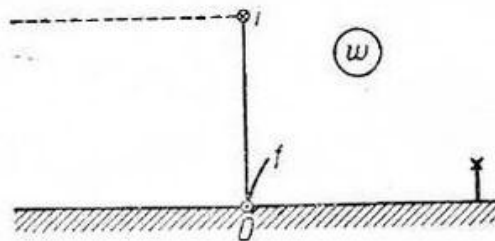
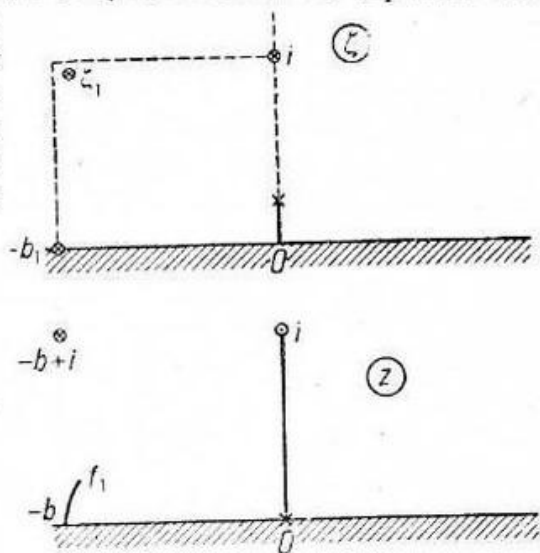
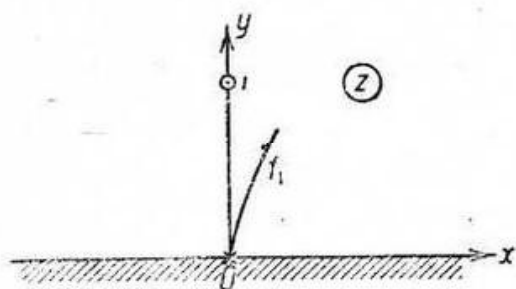
$$\frac{f'(\infty, s + \Delta s) - f'(\infty, s)}{\Delta s} = \frac{1}{4} |F'(\infty)| \frac{\Delta u}{\Delta s}. \quad (9)$$

Заставляя Δs стремиться к нулю, принимая во внимание (6) и деля почленно предельное равенство на равенство (8), получим (1).

3. Лемма III. Пусть область D , принадлежащая плоскости комплексного переменного $w = u + iv$, есть область, получаемая выбрасыванием из верхней плоскости $v > 0$ континуума E (связное замкнутое множество, фиг. 6), принадлежащего правой полуплоскости $u > 0$. Пусть, кроме того, C , $u = f(v) \geq 0$, есть кривая, выходящая из начала координат ортогонально действительной оси и обладающая непрерывной кривизной, равной K



Черт. 6.



Черт. 7.

в начале координат. Отобразим конформно область D на верхнюю полуплоскость $y > 0$, $z = x + iy$, при условиях, что точки $w = i$, $w = 0$ переходят в точки $z = i$, $z = 0$. Пусть C_1 , $x = f_1(y)$, есть кривая, соответствующая кривой C при этом отображении. Обозначая через K_1 кривизну кривой C_1 в начале координат, будем иметь:

$$K \leq K_1.$$

Доказательство. Выясним сначала связь между соответствующими друг другу кривыми C и C_1 в случае, когда континуум E есть прямолинейный отрезок γ длины a ,

перпендикулярный к действительной оси (черт. 7). Кроме того, — для наших целей этого будет достаточно — ограничимся случаем, когда число a (длина отрезка) бесконечно мало. Заметим, что при изучении связи между C и C_1 можно рассматривать конформное отображение области D на полуплоскость при условии, что точкам $w = i$, $w = 0$ будут отвечать точки $z = -b + i$, $z = -b$, где b — любое действительное число.

Рассмотрим функцию:

$$\zeta = \sqrt{\frac{z^2 - a_1^2}{1 + a_1^2}}, \quad \zeta = \xi + i\eta.$$

Эта функция реализует конформное отображение верхней полуплоскости $y > 0$, на область, получаемую выбрасыванием из полуплоскости $\eta > 0$ отрезка $0 \leq \eta \leq \frac{a_1}{\sqrt{1 + a_1^2}} = a$

мнимой оси.

Отсюда, добавляя к построенному преобразованию дробно-линейное, мы получим функцию $w = F(z)$, реализующую конформное отображение D на полуплоскость при нужных начальных условиях. По принятому условию наша задача сводится к изучению $F(z)$: 1) в точке, где F правильна и относительно z и относительно a , 2) для значений a как угодно малых. Следовательно, во всем дальнейшем, при разложении F по степеням a мы можем ограничиться лишь старшим членом этого разложения. Отсюда

$$\begin{aligned} a_1 &= a, \\ \zeta &= z - \frac{1}{2} a^2 \left(z + \frac{1}{z} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом точкам $z = -b$, $z = -b + i$ будут отвечать, соответственно, точки:

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= -b_1, \\ \zeta_1 &= -b_1 - m + i(1 - n), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} b_1 &= b - \frac{1}{2} a^2 \left(b + \frac{1}{b} \right), \\ m &= -\frac{1}{2} a^2 \frac{1}{b(1 + b^2)}, \\ n &= \frac{1}{2} a^2 \frac{b^2}{1 + b^2}. \end{aligned}$$

Произведем теперь над переменным ζ дробно-линейное преобразование:

$$w = C \frac{\zeta + b_1}{r(\zeta + b_1) + 1}, \quad (11)$$

где C и r — действительные числа, такие, чтобы точке ζ_1 отвечала точка $w = i$. Замечая, что m и n — бесконечно малые порядка a^2 , и отбрасывая бесконечно малые высших порядков, получим:

$$C = 1 + n; \quad r = m.$$

При этом преобразовании прямолинейный отрезок мнимой оси $0 \leq \eta \leq a$ перейдет в дугу окружности радиуса $\frac{1}{m}$, ортогональную к действительной оси в начале координат $w = 0$. Длина этой дуги, сохраняя принятую степень точности, будет равна a^2 . Таким образом соотношение между переменными z и w , устанавливаемое формулами (10) и (11), дает конформное отображение верхней полуплоскости на область D ¹⁾.

При этом отображении точкам $z = -b$, $z = -b + i$ будут отвечать соответственно точки $w = 0$, $w = i$.

¹⁾ Область D получается выбрасыванием из полуплоскости прямолинейного отрезка; при рассматриваемом преобразовании область D получится выбрасыванием из полуплоскости дуги окружности радиуса $\frac{1}{m}$, но это различие при достаточно малом a , очевидно, на результат влиять не будет.

Определим теперь кривизну кривой, в которую перейдет кривая $x = f_1(y)$, $f_1(0) = -b$. Для этой цели определим, куда перейдет при преобразовании (10) точка $z = -b + h + ik$, принадлежащая кривой $x = f_1(y)$ ($f_1(0) = -b$). Обозначая искомую точку через $\zeta = -b_1 + \mu + iv$, будем иметь:

$$\mu = h - \frac{1}{2} a^2 \left\{ h + \frac{-bh + h^2 + u^2}{b[(b-h)^2 + u^2]} \right\}, \quad (12)$$

$$v = k - \frac{1}{2} a^2 \left\{ 1 - \frac{1}{(b-h)^2 + k^2} \right\},$$

или, считая k бесконечно малым и отбрасывая бесконечно малые высших порядков, получим:

$$\mu = h + \frac{1}{2} a^2 \frac{(b-b^3)h + k^2}{b^3}; \quad (13)$$

$$v = k - \frac{1}{2} a^2 k \frac{b^2 - 1}{b^2};$$

отсюда

$$\frac{\mu}{v} = \frac{h}{k} - \frac{1}{2} \frac{a^2 k}{b^3}. \quad (14)$$

Определим теперь, куда перейдет найденная точка $\zeta = -b_1 + \mu + iv$ при преобразовании (11). Обозначая искомую точку через $u + iv$, будем иметь:

$$\begin{aligned} u + iv &= (1+n) \frac{\mu + iv}{m(\mu + iv) + 1} = (1+n) [1 - m(\mu + iv)] (\mu + iv) = \\ &= (1+n)(\mu + iv) - m(\mu + iv)^2, \end{aligned}$$

отсюда

$$\left. \begin{aligned} u &= (1+n)\mu + mv^2, \\ v &= (1+n)v, \\ \frac{u}{v} &= \frac{h}{k} - \frac{1}{2} a^2 k \frac{1}{b^3(b^2+1)} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

или

$$\frac{u}{v^2} \frac{v}{k} = \frac{h}{k^2} - \frac{1}{2} a^2 \frac{1}{b^3(b^2+1)}. \quad (16)$$

Таким образом, так как

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{h}{k^2} = \frac{1}{2} K_1 \quad \lim_{v \rightarrow 0} \frac{u}{v^2} = \frac{1}{2} K \quad \text{и} \quad \lim_{k \rightarrow 0} \frac{v}{k} = |F'(-b)|,$$

то, переходя к пределу при $K \rightarrow 0$, получим:

$$\left. \begin{aligned} K |F'(-b)| &= K_1 - \frac{1}{2} \frac{a^2}{b^3(b^2+1)}, \\ \frac{K_1}{|F'(-b)|} &= K^* = K + \frac{1}{2|F'(-b)|} \frac{a^2}{b^3(b^2+1)}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Полученная формула (17) показывает, что выражение K^* будет больше K , если отрезок γ (область D получается выбрасыванием отрезка γ из верхней полуплоскости $v > 0$) расположен справа от начала координат ($b > 0$), и K^* будет меньше K , если γ расположен слева от начала координат.

Для большей простоты изложения условимся кривизну K кривой $x = f_1(y)$ считать положительной, если $f_1''(y) > 0$ и отрицательной, если $f_1''(y) < 0$. При этом условии, в силу приведенных вычислений, формула (17) имеет место при значениях K как положительных, так и отрицательных.

Переходя к общему случаю, заметим, что в силу известных свойств последовательностей унивалентных функций достаточно доказать лемму для случая, когда континуум E есть простая дуга AB аналитической кривой, расположенной в положительном координатном угле ($u > 0, v > 0$) и один конец которой (A) находится на положительной части действительной оси.

Прежде чем дать доказательство леммы в общем виде, разберем еще один частный случай. Допустим, что при конформном отображении области D на полуплоскость континуум E переходит на *положительную часть действительной оси*. Обозначим через l длину дуги AB и через D_s область, которая получится, если к области D добавить дугу BC_s (часть дуги AB) длины $l-s$. Отобразим конформно область D_s на полуплоскость $y > 0$, $w = F_s(z)$ при условиях, что точки $w = 0$, $w = i$ переходят в точки $z = 0$, $z = i$. Положим:

$$K^*(s) = \frac{K(s)}{|F'_s(0)|},$$

где $K(s)$ есть кривизна (в начале координат) кривой, в которую переходит при отображении кривая $u = f(v)$. Докажем, что $K^*(s)$ есть монотонно возрастающая функция s . Для этой цели введем вспомогательное переменное $\zeta = \xi + i\eta$. Пусть теперь при отображении $w = F_s(\zeta)$ точке C_s плоскости w отвечает точка $S = b$; b есть действительное число; кроме того, в силу добавочного условия $b > 0$. Таким образом при этом конформном отображении бесконечно малому отрезку $C_s C_{s+\Delta s}$ дуги AB будет отвечать в плоскости ζ бесконечно малый отрезок, выходящий из точки $\zeta = b > 0$ ортогонально действительной оси. Пренебрегая бесконечно малыми высших порядков, мы можем считать, что отображение $w = F_{s+\Delta s}(z)$ есть результат отображения $w = F_s(\zeta)$ и отображения $\zeta = F(z)$, изученного при рассмотрении первого случая леммы. Отсюда, в силу (17):

$$K(s + \Delta s) = K(s) |F'(-b)| + \frac{1}{2} \frac{a^2}{b^3(b^2+1)},$$

или, деля левую и правую части на $|F'_s(0)| \cdot |F'(-b)|$,

$$\frac{K(s + \Delta s)}{|F'_s(0)| \cdot |F'(-b)|} = \frac{K(s)}{|F'_s(0)|} + \frac{1}{2} \frac{1}{|F'_s(0)| |F'(-b)|} \frac{a^2}{b^3(b^2+1)};$$

но

$$|F'_{s+\Delta s}(0)| = |F'_s(0)| |F'(-b)|,$$

следовательно, при достаточно малых Δs имеем:

$$K^*(s + \Delta s) - K^*(s) > 0.$$

Аналогично, если кривая AB расположена в левой полуплоскости, будем иметь:

$$K^*(s + \Delta s) - K^*(s) < 0. \quad (18)$$

При $s = 0$ область D_s вырождается в полуплоскость:

$$F_0(z) = z;$$

отсюда

$$K^*(0) = K,$$

где K есть кривизна данной кривой $u = f(v)$ в начале координат. Таким образом если E в правой полуплоскости и при отображении переходит в точки положительной части действительной оси, то

$$K^* > K, \quad (19)$$

и если E в левой полуплоскости и при отображении переходит в отрицательную часть действительной оси, то

$$K^* < K. \quad (19')$$

Перейдем к общему случаю. Докажем, прежде всего (19), без принятого выше добавочного ограничения. Допустим, от противного, что существует дуга AB , лежащая в правой полуплоскости и такая, что

$$K^* < K. \quad (20)$$

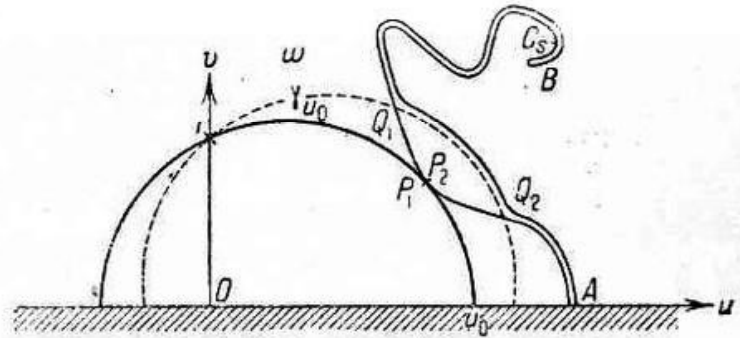
Возможны два случая: 1) при конформном отображении D на полуплоскость $y > 0$ точке B соответствует точка, принадлежащая положительной части действи-

тельной оси и 2) при том же отображении точке B отвечает точка отрицательной части действительной оси или точка бесконечность.

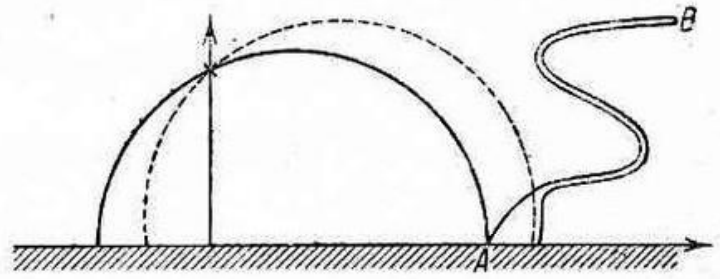
В первом случае (как раньше) заменим дугу AB дугой BC_s , принадлежащей дуге AB . Применяя рассуждения, приведенные выше, если точка C_s достаточно близка к точке B , то при такой деформации области D неравенство (20) только усилится.

Во втором случае (черт. 8, а или) строим, прежде всего, в плоскости w семейство окружностей, проходящих через точку $w = i$ и ортогональных к действительной оси.

Обозначим через γ_u окружность семейства, пересекающую положительную часть действительной оси в точке u , $0 < u < \infty$. Пусть теперь γ_{u_0} есть окружность, касающаяся кривой AB и такая, что все окружности γ_u , $u < u_0$, не имеют с кривой AB общих точек. Обозначим через P точку касания γ_{u_0} и AB (одну из точек касания, если таких точек не одна). При конформном отображении D на полуплоскость точке P будут отвечать две точки действительной оси. Ради удобства в изложении мы, как это принято, будем считать линию AB двойной; точка P будет тогда тоже двойной. Обозначим через P_1 конец путей, приводящих в P из внутренней части круга γ_{u_0} , через P_2 точку P , отвечающую другой стороне AB . Так как точке B отвечает



Черт. 8а.



Черт. 8б.

точка отрицательной части действительной оси, то и точке P_2 будет отвечать точка отрицательной части действительной оси. Покажем, что точке P_1 будет отвечать точка положительной части действительной оси; в самом деле, в силу принципа Монтеля¹⁾, если бы точке P_1 отвечала точка отрицательной части оси x , то это имело бы место при замене дуги AB дугой γ' окружности γ_{u_0} соединяющей точку P с точкой $w = u_0$ действительной оси. Покажем, что это последнее невозможно. Для этой цели отобразим конформно полуплоскость $v > 0$ на круг $|\zeta| < 1$ при условии, что точкам $w = i$, $w = 0$ будут отвечать точки $\zeta = 0$, $\zeta = 1$; при этом отображении дуга γ' перейдет в кусок радиуса $P'Q$ окружности $|\zeta| = 1$, причем аргумент точек этого радиуса будет меньше π . Обозначим через D_1 область, получаемую выбрасыванием из круга $|\zeta| < 1$ отрезка $P'Q$. Отообразим теперь D_1 конформно на полуплоскость при условии, что точки $\zeta = 0$, $\zeta = 1$ перейдут в точки $z = i$, $z = 0$. При этом отображении, очевидно, точке P' будет отвечать точка положительной части действительной оси.

Этим высказанное утверждение доказано.

Заметив это, проведем в плоскости w окружность $\gamma_{u_0 + \Delta u}$, где $\Delta u > 0$, и обозначим через $Q_1 Q_2$ дугу кривой AB , содержащую точку P и заключенную между точками пересечения кривой AB с окружностью $\gamma_{u_0 + \Delta u}$ (если P находится на действительной оси, то за Q_2 принимаем P (черт. 8б)). Заменим дугу $Q_1 Q_2$ (кривой AB) дугой окружности $\gamma_{u_0 + \Delta u}$, соединяющей те же точки Q_1 и Q_2 (точку Q_1 с точкой действительной оси). В силу (19), (19') и приведенных выше замечаний, при указанной деформации области D , если Δu достаточно мало, принятое неравенство (20) будет усилено.

1) См. примечание на стр. 8.

Таким образом в каждом из двух возможных случаев мы можем трансформировать дугу AB так, что неравенство (20) будет усилено. К новой дуге мы можем применить те же рассуждения и совершить одну из описанных трансформаций, усиливающих (20). Продолжая этот процесс и замечая, что если дуга AB будет превращена в дугу окружности γ_u , то точке B будет соответствовать при конформном отображении (области D на полуплоскость) точка положительной части действительной оси; мы видим, что процесс может остановиться только тогда, когда AB выродится в точку. Но это невозможно, ибо когда AB выродится в точку, тогда D превратится в полуплоскость, и мы будем иметь:

$$K^* = K,$$

что противоречит принятому неравенству (20).

Таким образом неравенство (19) доказано. Замечая, что при любом $sF'_s(0) > 1$, окончательно получим:

$$K(s) > \frac{K(s)}{|F'_s(0)|} = K^* > K.$$

Лемма IV. В плоскости комплексного переменного w дана простая выпуклая дуга AB , обладающая следующими свойствами: 1) кривизна дуги в каждой точке не больше K , 2) если через s обозначить расстояние от A до произвольной точки дуги, измеренное по дуге, то при $l_0 < s$ дуга AB имеет кривизну K . Пусть AC_s есть часть дуги AB длины s , $s > l_0$. Отобразим конформно внешность дуги AC_s на внешность круга $|z| \leq 1$ при условии, что бесконечно удаленные точки соответствуют друг другу. Обозначим через 2θ меньшую из двух дуг (окружности $|z|=1$), определенных точками, которые при отображении соответствуют точкам A и C_s . При этих условиях, если $Ks < \frac{1}{2\theta}$, то

$$\frac{d\theta}{ds} > -0,6K. \quad (21)$$

Доказательство. Отобразим конформно внешность дуги AC_s на верхнюю полуплоскость переменного ζ при условиях, что точке $w = \infty$ будет отвечать точка $\zeta = i$ и точке C_s будет отвечать точка $\zeta = 0$. При этом отображении дуге $C_s C_{s+\Delta s}$, $\Delta s > 0$, будет отвечать в плоскости ζ кривая γ (черт. 9), выходящая из начала координат ортогонально к действительной оси. В силу гипотезы 2) относительно дуги AB , легко показать, что кривая γ будет обладать непрерывной кривизной. Обозначим через $\Delta\sigma$ длину γ и через K_1 ее кривизну в начале координат. Нашей ближайшей задачей будет оценить сверху $\Delta\sigma$ и K_1 .

Начнем с оценки для $\Delta\sigma$. В силу формулы (1) леммы II, при конформном отображении внешности AC_s на внешность прямолинейного отрезка ¹⁾ длины не больше $\frac{2}{K} \sin \frac{Ks}{2} = L$, производная отображающей функции в точке C_s будет по модулю не меньше единицы. Следовательно, если через $\Delta\sigma_1$ обозначить длину дуги, в которую переходит дуга $C_s C_{s+\Delta s}$, то будем иметь

$$\Delta\sigma_1 \leq \Delta\sigma.$$

Отобразим теперь внешность прямолинейного отрезка на верхнюю полуплоскость. Пусть прямолинейный отрезок принадлежит действительной оси плоскости W , и пусть его концы находятся в точках $W = 0$ и $W = L$. Допустим, кроме того, что точке C_s отвечает конец $W = L$. При этих обозначениях искомое отображение будет:

$$W = \frac{L}{z^2 + 1},$$

отсюда

$$\Delta\sigma = \sqrt{1 - \frac{L}{L + \Delta\sigma_1}} < \sqrt{\frac{\Delta\sigma_1}{L}} \leq \sqrt{\frac{\Delta\sigma}{L}}. \quad (22)$$

¹⁾ Бесконечно удаленные точки соответствуют друг другу, точка C_s переходит в один из концов отрезка.

Перейдем ко второй оценке. Прежде всего, для определенности построений, будем в дальнейшем предполагать, что при изучаемом конформном отображении точка A переходит в точку отрицательной части действительной оси плоскости ζ . Отсюда, пользуясь тем, что дуга AB выпуклая, можно доказать, что часть кривой γ , находящаяся в окрестности начала координат, принадлежит правой полуплоскости.

Мы это обстоятельство примем без доказательства, ибо, как покажут дальнейшие рассмотрения, допущение, что γ вблизи начала расположена в левой полуплоскости, приводит к положительности $\frac{d\theta}{ds}$, и искомое неравенство (21) оправдывается автоматически.

Построим теперь дугу $E_t C_s$ (черт. 9) длины t , принадлежащую окружности радиуса $\frac{1}{K}$ и имеющую с дугой AB общей частью дугу $C_{t_0} C_s$. Обозначим через $D(t, s)$ область, получаемую выбрасыванием из плоскости дуг AC_s и $E_t C_s$. Отобразим конформно область $D(t, s)$ на верхнюю полуплоскость переменного ζ при прежних начальных условиях ($w = \infty \sim \zeta = i$, $C_s \sim \zeta = 0$). Обозначим через $K(t)$ кривизну кривой γ_t (при $\zeta = 0$), в которую при этом отображении перейдет кривая $C_s C_{s+\Delta s}$. В силу построения при $t \leq s - l_0$ имеем $K(t) = K_1$. В силу рассуждений, примененных при доказательстве леммы I, при разбираемом отображении $D(t, s)$ на полуплоскость, вогнутой стороне дуги $E_t C_s$ отвечает отрезок, принадлежащий положительной части действительной оси. Следовательно, при том же отображении и при Δt достаточно малом, дуге $E_t E_{t+\Delta t}$ будет отвечать дуга δ_t , расположенная в правой полуплоскости. Кроме того, отображение области $D(t + \Delta t, s)$ на полуплоскость можно осуществить так: отображаем $D(t, s)$ на полуплоскость $Im \xi > 0$, затем из этой полуплоскости выбрасываем дугу δ_t и полученную область отображаем на полуплоскость $Im \zeta > 0$. Отсюда, применяя лемму IV, непосредственно получаем, что $\left| \frac{d\zeta}{d\xi} \right|_{\xi=0} K(t + \Delta t) > K(t)$ при Δt достаточно малом и при любом t . Следовательно, при любом t

$$M \cdot K(2s) > K_1, \quad (23)$$

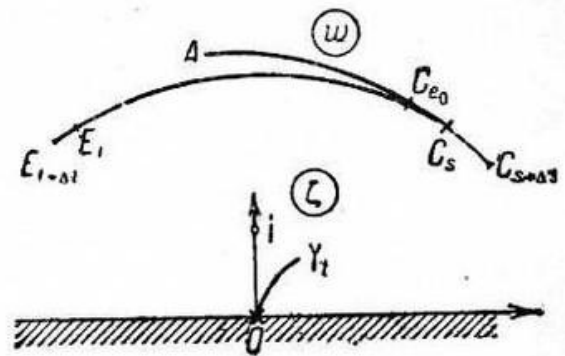
где $M = \left[\frac{d\zeta}{d\xi} \right]_{\xi=0}$ и когда в описанном выше отображении положено $D(t, s) = D(0, s)$ и $\Delta t = 2s$.

Отобразим конформно внешность дуги $E_{2s} C_s$ на верхнюю полуплоскость $Im \eta > 0$ ($w = \infty \sim \eta = i$, $C_s \sim \eta = 0$). Нетрудно подсчитать, что при этом: 1) дуге $C_s C_{s+\Delta s}$ будет отвечать дуга окружности радиуса $\rho = \text{ctg } Ks$, 2) пользуясь условием $K_s < \frac{\pi}{4}$, элементарным подсчетом можно показать, что дуга AC_s перейдет в дугу (пусть δ'), лежащую в левой полуплоскости. Пользуясь этим, мы можем теперь дать оценку для $K(2s)$. Для этой цели рассмотрим конформное отображение области $D(2s, s)$ на верхнюю полуплоскость $Im \zeta > 0$ как результат отображения внешности дуги $E_{2s} C_s$ на верхнюю полуплоскость $Im \eta > 0$ и отображения на верхнюю полуплоскость $Im \zeta > 0$ области, которая получится, если из полуплоскости $Im \eta > 0$ удалить дугу δ' . Замечая, что при втором из этих отображений мы находимся в условиях леммы IV, получим:

$$\left| \frac{d\zeta}{d\eta} \right|_{\eta=0} K(2s) < \frac{1}{\rho} = \text{tg}(Ks). \quad (24)$$

Отсюда, пользуясь (23), найдем:

$$K_1 > \left| \frac{d\zeta}{d\xi} \right| \left| \frac{d\eta}{d\zeta} \right| \frac{1}{\rho} = \left| \frac{d\eta}{d\xi} \right| \text{tg}(Ks).$$



Черт. 9.

Кроме того, за величины $|d\eta|$ и $|d\xi|$ можно принять длины бесконечно малых отрезков, в которые переходит бесконечно малая дуга $C_s C_{s+\Delta s}$ при отображениях соответственно внешности дуги $E_{2s} C_s$ и внешности дуги AC_s на полуплоскость. При такой интерпретации величин $|d\eta|$ и $|d\xi|$ приемами, много раз здесь использованными (кривизна AC_s меньше K , $K_s < \frac{\pi}{4}$), нетрудно показать, что $|d\eta| < |d\xi|$. Таким образом окончательно:

$$K_1 < \operatorname{tg}(Ks). \quad (25)$$

Итак, при конформном отображении внешности дуги AC_s на полуплоскость $\operatorname{Im} \zeta > 0$ ($w = \infty \sim \zeta = i$, $C_s \sim \zeta = 0$) дуга $C_s C_{s+\Delta s}$ переходит в дугу, ортогональную действительной оси, длина и кривизна которой оцениваются неравенствами (22) и (25).

Покажем еще, что если через ξ обозначить абсциссу точки, в которую при отображении переходит точка A , то будем иметь:

$$\xi > \frac{\sqrt{4 - K^2 s^2}}{Ks}. \quad (26)$$

В самом деле, в силу рассмотрений, проведенных в лемме I, для получения нужной оценки можно заменить дугу AC_s дугой окружности кривизны K и с хордой, равной s . Прodelывая отображение внешности дуги окружности на полуплоскость, получим искомое неравенство (26).

Отобразив конформно верхнюю полуплоскость переменного ζ на круг $|z| \leq 1$ ($\zeta = i \sim z = 0$, $\zeta = 0 \sim z = 1$), мы приходим к следующему результату:

при конформном отображении внешности дуги AC_s на круг $|z| < 1$ ($w = \infty \sim z = 0$, $C_s \sim z = 1$) дуга $C_s C_{s+\Delta s}$ переходит в дугу, выходящую из точки $z = 1$ ортогонально к окружности $|z| = 1$, длина Δz_2 и кривизна K_2 которой удовлетворяют неравенствам:

$$\Delta z_2 < 2\sqrt{\frac{\Delta s}{L}}, \quad (27)$$

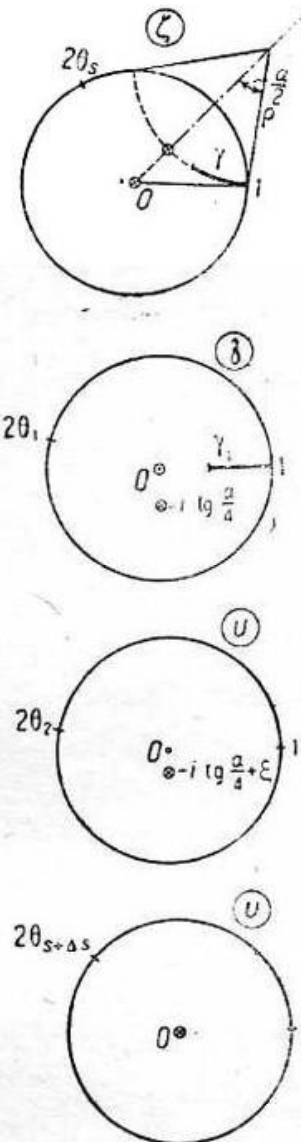
$$K_2 < \frac{1}{2} \operatorname{tg}(Ks), \quad (28)$$

$$L = \frac{2}{K} \sin \frac{Ks}{2},$$

где

кроме того, вогнутой части дуги AC_s отвечает дуга $(2\theta_s)$ окружности такая, что

$$\pi - 2 \operatorname{arcsin} \frac{Ks}{2} < 2\theta_s < \pi. \quad (29)$$



Черт. 10.

Перейдем теперь к доказательству основного неравенства. Прежде всего обозначим через $\Delta\theta$ приращение угла θ при переходе от дуги AC_s к дуге $AC_{s+\Delta s}$. Для оценки $\Delta\theta$ представим конформное отображение внешности дуги $AC_{s+\Delta s}$ на круг $|z| < 1$ как результат двух следующих конформных отображений (черт. 10): 1) отобразим внешность дуги AC_s на круг $|\zeta| < 1$ ($w = \infty \sim \zeta = 0$, $C_s \sim \zeta = 1$); 2) обозначая через γ кривую, в которую при этом перейдет дуга $C_s C_{s+\Delta s}$, и через ζ_0 точку, в которую перейдет точка $C_{s+\Delta s}$, отображаем конформно на круг $|\zeta| < 1$ ($\zeta = 0 \sim z = 0$, $\zeta = \zeta_0 \sim z = 1$) область, получаемую выбрасыванием из круга $|\zeta| < 1$ дуги γ .

Аргумент точки (плоскость ζ), соответствующей при первом отображении точке C_s , есть, очевидно, $2\theta_s$. Аргумент точки (плоскости z), соответствующей при втором отображении точке $\zeta = e^{2i\theta_s}$, есть, очевидно, $2\theta_{s+\Delta s}$. Следовательно, для оценки $\Delta\theta = \theta_{s+\Delta s} - \theta_s$ достаточно изучить второе отображение при условии, что кривая γ удовлетворяет условиям (27), (28) и что θ_s удовлетворяет неравенствам (29). Кроме того, пренебрегая бесконечно малыми высших порядков, мы будем считать, что γ есть дуга окружности радиуса:

$$\rho = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \geq \frac{1}{K_2} 2 \operatorname{ctg}(Ks), \quad (30)$$

где α есть величина, введенная для удобства дальнейших вычислений.

Построим функцию:

$$\mathfrak{z} = \frac{\zeta e^{i\frac{\alpha}{2}} - i \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}}{i \zeta e^{i\frac{\alpha}{2}} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4} + 1}, \quad (31)$$

эта функция реализует конформное отображение круга $|\zeta| < 1$ на круг $|\mathfrak{z}| < 1$, причем, как показывает непосредственный подсчет, дуга γ переходит в отрезок γ_1 действительной оси, выходящей из точки $\mathfrak{z} = 1$.

Выясним некоторые свойства этого отображения. Имеем:

$$\frac{d\mathfrak{z}}{d\zeta} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{4}}{\left(i \zeta e^{i\frac{\alpha}{2}} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4} + 1\right)^2} e^{i\alpha},$$

отсюда

$$\left| \frac{d\mathfrak{z}}{d\zeta} \right|_{z=0} = 1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{4} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{4}}, \quad (32)$$

$$\left| \frac{d\mathfrak{z}}{d\zeta} \right|_{z=1} = \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}}. \quad (33)$$

Пользуясь (33) и обозначая через h длину отрезка γ_1 , получим:

$$h = \frac{\Delta\sigma_s}{\cos \frac{\alpha}{2}}. \quad (34)$$

Как было отмечено выше, всем точкам окружности $|\zeta| = 1$ отвечают точки окружности $|\mathfrak{z}| = 1$. Обозначим через $2\theta_1$ аргумент точки, принадлежащей окружности $|\mathfrak{z}| = 1$ и отвечающей точке $\zeta = e^{2i\theta_s}$. Подставляя в формулу (31) $\zeta = e^{2i\theta_s}$ и $\mathfrak{z} = e^{2i\theta_1}$, приравнявая, затем, в полученном равенстве действительные части, получим:

$$\cos 2\theta_1 = \frac{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \left(\frac{\alpha}{2} + 2\theta\right)}{1 - \sin \frac{\alpha}{2} \sin \left(\frac{\alpha}{2} + 2\theta\right)},$$

отсюда

$$\cos \theta_1 = \frac{\cos \left(\frac{\alpha}{2} + \theta\right)}{\sqrt{1 - \sin \frac{\alpha}{2} \sin \left(\frac{\alpha}{2} + 2\theta\right)}}. \quad (35)$$

Заметим еще, что в рассматриваемом отображении точке $\zeta = 0$ отвечает точка

$$\mathfrak{z} = -i \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4} \text{ и точке } \zeta = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4} e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)} \text{ отвечает точка } \mathfrak{z} = 0.$$

Произведем теперь над переменной ζ следующее преобразование:

$$\zeta + \frac{1}{\zeta} = \frac{4+h^2}{4} \left(u + \frac{1}{u} \right) + \frac{h^2}{2}, \quad (36)$$

где u — новое комплексное переменное. Соотношение (36) реализует конформное отображение области (черт. 10), получаемой выбрасыванием из круга $|\zeta| < 1$ отрезка γ , на круг $|u| < 1$. Подставляя в (36) $u = 0$, $u = 1$, непосредственно обнаруживаем, что при этом отображении точки $\zeta = 0$, $u = 0$ соответствуют друг другу и что свободному концу отрезка γ_1 отвечает точка $u = 1$. Таким образом соотношение между ζ и u , определяемое формулами (31) и (36), дает конформное отображение области, которая получится, если из круга $|\zeta| < 1$ выкинуть дугу γ , на круг $|u| < 1$, причем свободному концу γ отвечает точка $u = 1$. Определим точки круга $|u| \leq 1$, в которые перейдут точки $\zeta = 0$ и $z = e^{2i\theta}$. Пусть $u = -i \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4} + \xi$ и $u = e^{2i\theta_2}$ суть искомые точки, это будут, очевидно, те точки, в которые перейдут при преобразовании (36) точки $\zeta = -i \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}$ и $\zeta = e^{2i\theta_1}$. При вычислениях ξ и θ_2 мы будем в соответствии с основной задачей считать h бесконечно малым и будем сохранять лишь главные бесконечно малые. После подстановки в (36) $\zeta = -i \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}$ и $u = -i \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4} + \xi$ и упрощений получим:

$$\xi = -\frac{h^2}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{4} - \frac{ih^2}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}, \quad (37)$$

отсюда

$$|\xi| = \frac{h^2}{2} \sin \frac{\alpha}{4}. \quad (38)$$

Займемся вычислением θ_2 . После подстановки в (36) $\zeta = e^{2i\theta_1}$ и $u = e^{2i\theta_2}$, получим:

$$\cos 2\theta_1 = \frac{4+h^2}{4} \cos 2\theta_2 + \frac{h^2}{4} = \cos 2\theta_2 + \frac{h^2}{2} \cos^2 \theta_2.$$

Отсюда, пренебрегая бесконечно малыми высших порядков:

$$\cos 2\theta_2 = \cos 2\theta_1 - \frac{h^2}{2} \cos^2 \theta_1$$

или

$$\theta_2 - \theta_1 = \Delta\theta_1 = \frac{h^2}{8} \operatorname{ctg} \theta_1. \quad (39)$$

Для получения окончательной оценки $\Delta\theta$ нам остается отобразить конформно круг $|u| < 1$ на круг $|z| < 1$ при условии, что точкам $u = -i \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4} + \xi$ и $u = 1$ будут отвечать точки $z = 0$ и $z = 1$, а затем определить аргумент точки, в которую при этом отображении перейдет точка $u = e^{2i\theta_2}$. Ради упрощения выкладок мы, предварительно, отобразим конформно круг $|u| < 1$ на круг $|v| < 1$ при условии, что точкам $u = -i \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}$, $u = 1$ будут отвечать точки $v = 0$ и $v = 1$ (черт. 10). Это отображение будет, очевидно, реализовано формулой (31), где вместо ζ надо подставить v и вместо ζ подставить u . Сохраняя, как раньше, лишь главные бесконечно малые, определим аргумент $2\theta + 2\Delta_1\theta$ точки $e^{2i(\theta + \Delta\theta)}$, в которую перейдет точка $e^{2i\theta_2}$, а также определим модуль v_0 , где v_0 есть точка, в которую переходит точка $u = -i \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4} + \xi$. Займемся подсчетом $\Delta_1\theta$. С одной стороны, в силу (39) и (35), имеем:

$$\begin{aligned} \cos \theta_2 &= \cos \theta_1 - \sin \theta_1 \frac{h^2}{8} \operatorname{ctg} \theta_1 = \cos \theta_1 \left(1 - \frac{h^2}{8} \right) = \\ &= \left(1 - \frac{h^2}{8} \right) \frac{\cos \left(\frac{\alpha}{2} + \theta \right)}{\sqrt{1 - \sin \frac{\alpha}{2} \sin \left(\frac{\alpha}{2} + 2\theta \right)}}. \end{aligned} \quad (40)$$

С другой стороны, применяя (35) к соотношению между u и v , получим:

$$\begin{aligned} \cos \theta_2 &= \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \theta + \Delta_1 \theta\right)}{\sqrt{1 - \sin \frac{\alpha}{2} \sin\left(\frac{\alpha}{2} + 2\theta + 2\Delta_1 \theta\right)}} = \left\{ \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \theta\right) - \Delta_1 \theta \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \theta\right) \right\} \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \sin \frac{\alpha}{2} \sin\left(\frac{\alpha}{2} + 2\theta\right)}} + \frac{\Delta_1 \theta \sin \frac{\alpha}{2} \cos\left(\frac{\alpha}{2} + 2\theta\right)}{\left[1 - \sin \frac{\alpha}{2} \sin\left(\frac{\alpha}{2} + 2\theta\right)\right]^{\frac{3}{2}}} \right\} = \\ &= \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \theta\right)}{\sqrt{1 - \sin \frac{\alpha}{2} \sin\left(\frac{\alpha}{2} + 2\theta\right)}} - \frac{\Delta_1 \theta \cos \frac{\alpha}{2} \sin \theta}{1 - \sin \frac{\alpha}{2} \sin\left(\frac{\alpha}{2} + 2\theta\right)}. \end{aligned} \quad (41)$$

Приравнявая правые части (40) и (41), получим:

$$\Delta_1 \theta = \frac{h^2 \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \theta\right) \left[1 - \sin \frac{\alpha}{2} \sin\left(\frac{\alpha}{2} + 2\theta\right)\right]}{8 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \theta}. \quad (42)$$

Или, упрощая оценку:

$$\Delta_1 \theta > -\frac{h^2}{8 \sin \theta} \left(1 + \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Найдем теперь модуль v_0 . Пренебрегая бесконечно малыми высших порядков, имеем:

$$|v_0| = \left| \zeta \right| \left| \frac{dv}{du} \right|_{u = -i \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}} = \frac{|\zeta|}{\left| \frac{d\zeta}{d^*} \right|_{\zeta=0}}.$$

Отсюда, в силу (32), получим:

$$|v_0| = \frac{h^2}{2} \sin \frac{\alpha}{4} \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{4}}{\cos \frac{\alpha}{2}} < \frac{h^2}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Теперь для получения окончательной оценки снизу дуги $2\theta_{s+\Delta_s}$ нам достаточно конформно отобразить круг $|v| < 1$ на круг $|z| < 1$ при условии, что точке $v = v_0$ будет отвечать точка ($z = 0$), а затем определить разность аргументов точек, которые при этом отображении будут соответствовать точкам $v = e^{i(2\theta + \Delta_1 \theta)}$ и $v = 1$.

Найденная разность и будет искомым значением $2\theta_{s+\Delta_s}$.

Искомое конформное отображение будет осуществляться функцией:

$$z = \frac{ve^{-i\beta} - p}{1 - pve^{-i\beta}},$$

где β есть аргумент v_0 и где положено:

$$p = \frac{h^2}{4} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Или, пренебрегая бесконечно малыми высших порядков:

$$z = ve^{-i\beta} - p + p v^2 e^{-2i\beta}.$$

Отсюда косинус аргумента z при $v = 1$ будет равен:

$$\cos \psi_1 = \cos \beta - p (1 - \cos 2\beta) = \cos (\beta + 2p \sin \beta).$$

Аналогично, косинус аргумента z при $v = e^{i(2\theta + 2\Delta_1 \theta)}$ будет равен:

$$\begin{aligned} \cos \psi_2 &= \cos (2\theta + 2\Delta_1 \theta - \beta) - p [1 - \cos (4\theta + 4\Delta_1 \theta - 2\beta)] = \\ &= \cos \{2\theta + 2\Delta_1 \theta - \beta + 2p \sin (2\theta + 2\Delta_1 \theta - \beta)\}. \end{aligned}$$

Таким образом

$$2\theta_{s+\Delta s} = \psi_2 - \psi_1 = 2\theta + 2\Delta_1\theta + 2p \sin(2\theta + 2\Delta_1\theta - \beta) + 2p \sin \beta,$$

отсюда

$$\begin{aligned} \Delta\theta = \theta_{s+\Delta s} - \theta_s &= \Delta_1\theta + p \sin(2\theta + 2\Delta_1\theta - \beta) + p \sin \beta > \\ &> -\frac{h^2}{8} \frac{1}{\sin \theta} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \left(1 + \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) - \frac{h^2}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Заменяя h , α и θ по формулам (22), (27), (29), (30) и (34) через Δs , K и s , получим:

$$\frac{d\theta}{ds} > -\frac{1}{8} \frac{K \operatorname{tg} Ks}{\sin \frac{Ks}{2}} \left[1 + \frac{1}{4} \operatorname{tg}^2 Ks\right] \left[4 + \frac{2 - \frac{1}{1 - \frac{1}{4} \operatorname{tg}^2 Ks}}{\cos\left(2 \arcsin \frac{Ks}{2}\right)}\right].$$

Отсюда, используя условие $Ks < \frac{1}{20}$, окончательно получим:

$$\frac{d\theta}{ds} > -1,5K.$$

Лемма V. Пусть в плоскости комплексного переменного z дана простая выпуклая дуга C с концами в точках A и B кривизны не больше K ; пусть, кроме того, в плоскости переменного w дана дуга A_1B_1 постоянной кривизны (дуга окружности) такая, что длина ее хорды равна длине отрезка AB . Обозначим через $w = F(z)$ функцию, реализующую конформное отображение внешности C на внешность A_1B_1 , при условии соответствия бесконечно удаленных точек и точек A, A_1 . Если при этом отображении точке B будет отвечать точка B_1 и если $K < \frac{1}{21} \frac{1}{AB}$, то в каждой точке z_0 дуги имеем: $1 + 14lK > |F'(z_0)| > 1 - 13lK$, причем за $F'(z_0)$ принимается предельное значение $F'(z)$, когда z стремится к z_0 , оставаясь вне AB с ее выпуклой стороны¹⁾, и где l есть длина дуги AB .

Доказательство. Ради большей простоты выкладок допустим, что длина отрезка AB равна четырем; допустим, кроме того, что точки A, B, A_1, B_1 расположены на действительной оси и что начала координат $z = 0, w = 0$ находятся соответственно в середине AB и A_1B_1 .

Введем две новые вспомогательные переменные $Z = \rho e^{i\varphi}$ и W и рассмотрим преобразования:

$$z = Z + \frac{1}{Z}, \quad (43)$$

$$w = W + \frac{1}{W}. \quad (44)$$

Как известно, соотношения (43) и (44) реализуют конформное отображение внешности любой дуги (окружности) Γ_1 с концами в точках A и B на некоторый круг Γ_2 . При этом бесконечно удаленной точке $z = \infty$ отвечает начало координат $Z = 0$, и точкам $z = \pm 2$ будут отвечать точки $Z = \pm 1$. Если мы через 4β обозначим угловую меру дуги Γ_1 , то круг Γ_2 будет иметь радиус $\frac{1}{\cos \beta}$; центр в точке $Z = i \operatorname{tg} \beta$, окружность $\Gamma_2: |Z - i \operatorname{tg} \beta| = \frac{1}{\cos \beta}$ будет образовывать с окружностью $|Z| = 1$ в точках $Z = \pm 1$ угол β (черт. 11).

Нашей ближайшей задачей будет изучение области, в которую переводит преобразование (43) внешность дуги C . Для этой цели дадим предварительно некоторые оценки для (43), предполагая, что z принадлежит области, ограниченной AB и дугой Γ_1 ,

¹⁾ Точка z и дуга AB должны находиться по разным сторонам касательной, проведенной к AB в точке z_0 .

причем будем считать

$$\operatorname{tg} \beta < \frac{1}{20}. \quad (45)$$

Найдем, прежде всего, связь между φ и ρ , $0 > \varphi > -\pi$ для точек окружности

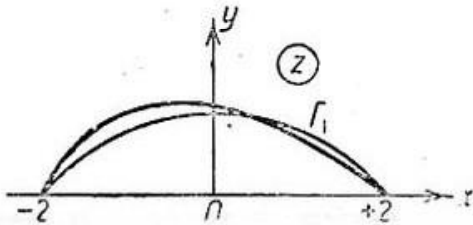
$$\Gamma_2 : |Z - i \operatorname{tg} \beta| = \frac{1}{\cos \beta}.$$

Имеем:

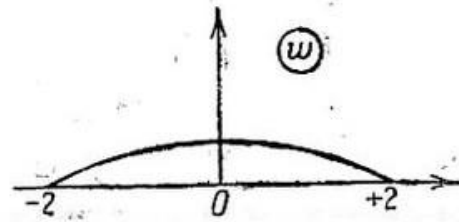
$$\rho = \frac{\cos(\varphi - \mu)}{\cos \beta \cos \varphi} = \frac{\cos \mu}{\cos \beta} + \operatorname{tg} \beta \sin \varphi,$$

где μ есть угол, под которым виден отрезок $(0, i \operatorname{tg} \beta)$ из точки $\rho e^{i\varphi}$.

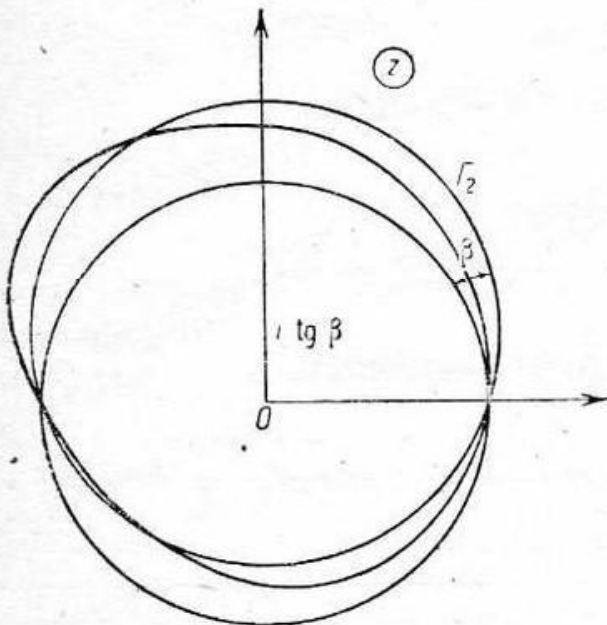
$$\sin \mu = \sin \beta \cos \varphi,$$



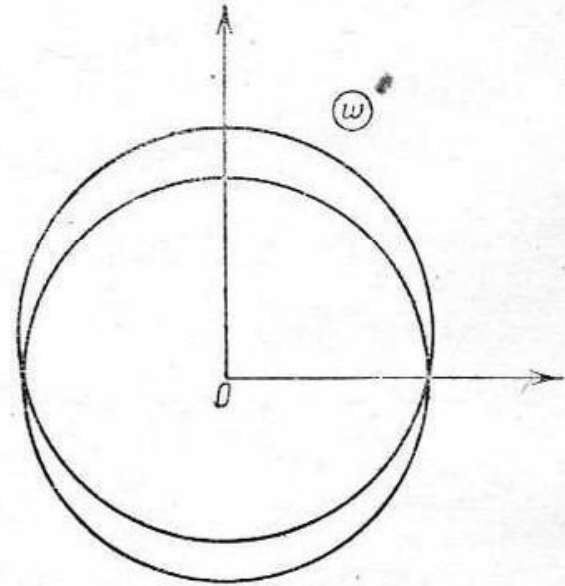
Черт. 11а.



Черт. 11с.



Черт. 11b.



Черт. 11d.

отсюда, пользуясь (45):

$$1 + 0,1 |\sin \varphi| \operatorname{tg} \beta > \frac{\cos \mu}{\cos \beta} \geq 1.$$

Таким образом

$$\rho = 1 + k_1 \operatorname{tg} \beta \sin \varphi,$$

причем

$$0,9 < k_1 < 1 \quad \text{при} \quad -\pi < \varphi < 0,$$

$$1 < k_1 < 1,1 \quad \text{при} \quad 0 < \varphi < \pi.$$

Аналогично

$$\frac{1}{\rho} = 1 + k \operatorname{tg} \beta \sin \varphi, \quad (46)$$

причем

$$-1,1 < k \leq -1 \quad \text{при} \quad -\pi < \varphi < 0,$$

$$-1 < k < -0,9 \quad \text{при} \quad 0 < \varphi < \pi.$$

Найдем теперь зависимость между аргументом φ точки окружности Γ_2 и действительной частью x , $z = x + iy$, соответствующей точки окружности Γ_1 . Имеем:

$$x = \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) \cos \varphi.$$

Отсюда, принимая во внимание (45), получаем:

$$2 \cos \varphi < x < (2 + 1,1 \operatorname{tg}^2 \beta \sin^2 \varphi) \cos \varphi.$$

Оценим в заключение $\left| \frac{dz}{dZ} \right|$ для точек окружности Γ_2 . Имеем:

$$\left| \frac{dz}{dZ} \right|^2 = \left| 1 - \frac{1}{Z^2} \right|^2 = 1 + \frac{1}{\rho^4} - \frac{2}{\rho^2} \cos 2\varphi,$$

причем выражение справа есть, очевидно, квадрат расстояния от точки $Z = 1$ до точки $Z = \frac{1}{\rho^2} e^{2i\varphi}$. Так как при $-\pi < \varphi < 0$ имеем $\rho < 1$, то

$$\left| \frac{dz}{dZ} \right| > 2 \sin \varphi, \quad -\pi < \varphi < 0. \quad (47)$$

Для общей оценки $\left| \frac{dz}{dZ} \right|$ займемся предварительно оценками $\frac{1}{\rho^2}$ и $\frac{1}{\rho^4}$. В силу (46) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho^2} &= 1 + 2k \operatorname{tg} \beta |\sin \varphi| + k^2 \operatorname{tg}^2 \beta \sin^2 \varphi, \\ \frac{1}{\rho^4} &= 1 + 4k \operatorname{tg} \beta |\sin \varphi| + 6k^2 \operatorname{tg}^2 \beta \sin^2 \varphi + 4k^3 \operatorname{tg}^3 \beta |\sin^3 \varphi| + k^4 \operatorname{tg}^4 \beta \sin^4 \varphi = \\ &= 1 + 4k \operatorname{tg} \beta |\sin \varphi| + \operatorname{tg}^2 \beta \sin^2 \varphi (6k^2 + 4k^3 \operatorname{tg} \beta |\sin \varphi| + k^4 \operatorname{tg}^2 \beta \sin^2 \varphi). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \left| \frac{dz}{dZ} \right|^2 &= 2 + 4k \operatorname{tg} \beta |\sin \varphi| - [2 + 4k \operatorname{tg} \beta |\sin \varphi|] \cos^2 \varphi + \\ &+ \operatorname{tg}^2 \beta \sin^2 \varphi (6k^2 + 4k^3 \operatorname{tg} \beta |\sin \varphi| + k^4 \operatorname{tg}^2 \beta \sin^2 \varphi) - 2k^2 \operatorname{tg}^2 \beta \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi = \\ &= 4 \sin^2 \varphi \{ 1 + 2(k + k_1) \operatorname{tg} \beta \}, \end{aligned}$$

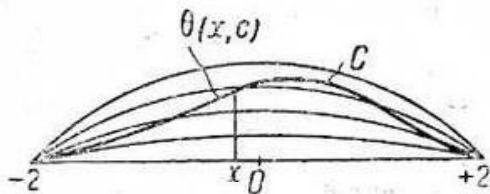
где $|k_1| < 0,09$.

Таким образом окончательно:

$$\left| \frac{dz}{dZ} \right| = 2 \sin \varphi \{ 1 + k_2 \operatorname{tg} \beta \}, \quad |k_2 - 1| < 0,2. \quad (48)$$

Наряду с найденными оценками (46), (47), (48) нам понадобится еще, для изучения образа кривой C в плоскости Z , решение следующей геометрической задачи (черт. 12).

Дано семейство окружностей, проходящих через точки $z = \pm 2$, кроме того, дана выпуклая кривая C , проходящая через те же точки $z = \pm 2$. Обозначим через $\theta = \theta(x, C)$ угол, под которым кривая C пересекает соответствующую окружность семейства в точке с абсциссой x ; причем θ считается со знаком плюс, если в точке пересечения угловой коэффициент касательной к окружности больше углового коэффициента касательной к кривой C , и со знаком минус в обратном случае. При этих обозначениях и при дополнительном условии, что кривизна C меньше $K_0 = \frac{\sin 2\beta}{2}$, $\operatorname{tg} 2\beta < \frac{1}{10}$



Черт. 12.

и что C принадлежит кругу $|z| \leq 2$, требуется определить экстремальные значения θ при любом фиксированном x . Переходя к решению поставленной задачи, заметим прежде всего, что в силу ограничений, наложенных на класс допустимых линий, всякая кривая C класса допустимых линий будет принадлежать сегменту S , расположенному в верхней полуплоскости, ограниченному отрезком $(-2, +2)$ и дугой окружности радиуса $\frac{1}{K_0}$: $|z - \frac{i}{K_0} \sqrt{1 - 4K_0^2}| = \frac{1}{K_0}$. Отсюда, обозначая через y ординату точки кривой C , будем иметь:

$$y \leq \frac{1}{4} \operatorname{tg} 2\beta (4 - x^2) < \frac{1}{40} (4 - x^2).$$

Допустим теперь, что кривая C проходит через точку $A(x_0, y_0)$. Проведем через точки $z = -2$ и A выпуклую дугу \bar{C} кривизны K_0 . Очевидно, что при $-2 < x < x_0$ кривая \bar{C} расположена выше кривой C , следовательно:

$$\theta(x_0, \bar{C}) \geq \theta(x_0, C).$$

Проведем через точки A и $z = +2$ отрезок прямой, в силу выпуклости C кривая C будет расположена выше приведенного отрезка, следовательно:

$$\arctg \frac{y_0}{2+x_0} \geq \theta(x_0, C).$$

Отсюда легко видеть, что среди всех кривых C , удовлетворяющих условиям задачи и проходящих через точку $A(x_0, y_0)$, наибольшее значение $\theta(x_0, C)$ будет равно меньшему из следующих двух чисел $\theta(x_0, \bar{C})$ и $\arctg \frac{y_0}{2-x_0}$. Найдем выражение для $\theta(x_0, \bar{C})$:

$$\theta(x, \bar{C}) = \arcsin \frac{K_0}{2} \sqrt{(x+2)^2 + y^2} - \arctg \frac{y}{2-x}. \quad (49)$$

Функция $\theta(x, \bar{C})$ обращается в нуль в точках дуги, ограничивающей сверху сегмент S , кроме того, пользуясь (49) при $|x| \leq 2$, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta(x, \bar{C})}{\partial y} &= \frac{K_0 y}{2 \sqrt{1 - \frac{K_0^2}{4} [(x+2)^2 + y^2]} \sqrt{(x-2)^2 + y^2}} - \\ &- \frac{2-x}{(2-x)^2 + y^2} < \frac{1}{40} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4 \cdot 400}}} \frac{2-x}{(2-x)^2 + \frac{1}{1600} (4-x^2)^2} < 0. \end{aligned} \quad (50)$$

Функция $\arctg \frac{y}{2+x}$ при $y=0$ обращается в нуль; кроме того,

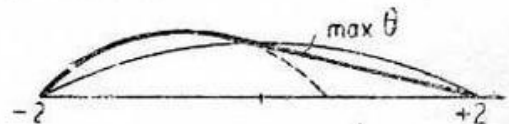
$$\frac{\partial}{\partial x} \arctg \frac{y}{2+x} = \frac{2+x}{(2+x)^2 + y^2} > 0. \quad (51)$$

Следовательно, кривая, дающая максимум функционалу $\theta(x, C)$, будет проходить через точку $A(x, y)$, ордината y которой удовлетворяет уравнению:

$$\arcsin \frac{K_0}{2} \sqrt{(x+2)^2 + y^2} - \arctg \frac{y}{2-x} = \arctg \frac{y}{2+x}. \quad (52)$$

Для того чтобы получить максимальное значение $\theta(x, C)$, достаточно найденное из (52) выражение y через x подставить в функцию $\arctg \frac{y}{2+x}$. Дадим приближенную оценку сверху максимума $\theta(x, C)$.¹ В силу (51) для этой же цели достаточно оценить сверху корень уравнения (52) и найденное приближенное выражение для y подставить в функцию $\arctg \frac{y}{2+x}$. В силу (50), (51) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial y} &> -\frac{1}{2-x}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \arctg \frac{y}{2+x} &> \frac{2+x}{(2+x)^2 + \frac{1}{1600} (4-x^2)^2} > \frac{0,99}{2+x}. \end{aligned}$$



Черт. 13.

Отсюда искомое выражение для y получим, решая относительно y следующее уравнение:

$$\frac{0,99}{2+x} y = -\frac{1}{2-x} (y - Y), \quad (53)$$

1) Кривая, дающая максимум, будет состоять из дуги окружности радиуса $\frac{1}{K_0}$ и прямолинейного отрезка (черт. 13).

где Y есть ордината точки дуги, ограничивающей сегмент S ; в силу (49) имеем:

$$Y < \frac{\operatorname{tg}^2 \beta}{40} (4 - x^2).$$

Решая (53), получим:

$$y < \frac{2+x}{3,9} Y < \frac{2+x^2}{3,9} (4 - x^2) \frac{\operatorname{tg}^2 \beta}{4}.$$

Отсюда, окончательно, какова бы ни была кривая C , удовлетворяющая условиям задачи, имеем:

$$\theta(x, C) \leq \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{2+x} \leq \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{tg}^2 \beta}{4 \cdot 3,9} (4 - x^2)$$

или

$$\operatorname{tg} \theta(x, C) \leq \frac{\operatorname{tg}^2 \beta}{4 \cdot 3,9} (4 - x^2). \quad (54)$$

Для разыскания минимума функционала θ никаких добавочных вычислений не требуется. В самом деле, в силу правила знаков, принятого при измерении θ , и в силу симметрии, имеем:

$$\min \theta(x, C) = -\max \theta(-x, C),$$

отсюда

$$\operatorname{tg} \theta(x, C) \leq -\frac{\operatorname{tg}^2 \beta}{4 \cdot 3,9} (4 - x^2). \quad (55)$$

Пользуясь проделанными вычислениями, установим теперь некоторые свойства кривой \bar{C} , являющейся, при преобразовании (43), образом кривой C .

Кривая \bar{C} есть, очевидно, простая замкнутая линия, причем часть ее, соответствующая выпуклой стороне дуги C , принадлежит луночке $|z| \leq 1, |z - i \operatorname{tg} \beta| \geq \frac{1}{\cos \beta}$, а другая часть, соответствующая вогнутой стороне дуги C , принадлежит луночке $|z| \geq 1, |z - i \operatorname{tg} \beta| \leq \frac{1}{\cos \beta}$. Отсюда заключаем, что для любой точки кривой \bar{C} имеют место соотношения (46), (47), (48).

Как было выяснено выше, кривая C пересекается с дугой Γ_1 окружности, проходящей через точки $z = \pm 2$ под углом $\theta(x, C)$, причем θ удовлетворяет неравенства (54) и (55). Следовательно, кривая \bar{C} будет пересекаться с соответствующей Γ_1 дугой Γ_2 окружности, проходящей через точки $z = \pm 1$ под тем же углом θ . Принимая во внимание (47), получим:

$$|\operatorname{tg} \theta| < \frac{1}{3,9} \operatorname{tg}^2 \beta \sin^2 \varphi. \quad (56)$$

Займемся оценкой кривизны кривой \bar{C} . Как известно, кривизна K кривой C и кривизна \bar{K} образа \bar{C} этой кривой в соответствующей точке связаны следующим соотношением:

$$\bar{K} = \pm K \left| \frac{dz}{dZ} \right| - \operatorname{Im} \left[e^{i\alpha} \frac{d^2z}{dz dZ} \right], \quad (57)$$

где α есть угол, образованный касательной к C с действительной осью. Заметим, что второе слагаемое правой части (57) есть проекция вектора $\frac{d^2z}{dz dZ}$ на луч, образующий с действительной осью угол $\frac{\pi}{2} + \alpha$. В нашем случае

$$\frac{d^2z}{dz dZ} = \frac{2}{Z(Z^2-1)} = \frac{1}{Z+1} + \frac{1}{Z-1} - \frac{2}{Z},$$

отсюда

$$\operatorname{Im} \left[e^{i\alpha} \frac{d^2z}{dz dZ} \right] = \frac{1}{|Z+1|} \sin \gamma_1 + \frac{1}{|Z-1|} \sin \gamma_2 - \frac{2}{|Z|} \sin \gamma_3, \quad (58)$$

где γ_1, γ_2 и γ_3 суть углы, образованные касательной к кривой \bar{C} соответственно с векторами $Z+1, Z-1, Z$.

При подсчете величин, входящих в правую часть соотношения (58), будем различать два случая: первый случай, когда точка кривой \bar{C} лежит внутри круга $|Z| < 1$, и второй случай, когда эти точки лежат вне круга $|Z| < 1$. Мы ограничимся подсчетами для первого случая, ибо для второго случая подсчет вполне аналогичен и, при принятой точности, приводит к той же оценке.

Итак, пусть $Z_0 = \rho e^{i\varphi}$ есть произвольная точка кривой \bar{C} , лежащая внутри круга $|Z| < 1$. Проведем через эту точку дугу окружности Γ , с концами в точках $Z = \pm 1$ и лежащую внутри круга $|Z| < 1$. Обозначим через $\bar{\beta}$ острый угол, под которым построенная дуга Γ пересекается с окружностью $|Z| = 1$. Имеем:

$$\bar{\beta} < \beta.$$

Кроме того, радиус Γ будет равен $\frac{1}{\cos \bar{\beta}}$, а центр Γ будет расположен в точке $Z = i \operatorname{tg} \bar{\beta}$.

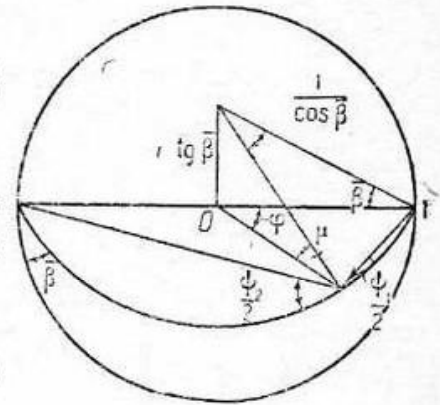
Обозначим через $\frac{\psi_1}{2}$, $\frac{\psi_2}{2}$ и $\frac{\psi_3}{2}$, соответственно, острые углы, образованные касательной к Γ в точке z_0 с векторами

$$Z_0 - 1, \quad Z_0 + 1 \quad \text{и} \quad Z_0. \quad \text{Имеем:}$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{\psi_1}{2} + \theta, \\ \gamma_2 &= \frac{\psi_2}{2} - \theta, \\ \gamma_3 &= \psi_3 - \theta. \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Заметив, что углы ψ_1 и ψ_2 суть углы, под которыми из точки $Z = i \operatorname{tg} \bar{\beta}$ видны отрезки $(Z_0, 1)$ и $(Z_0, -1)$, получим:

$$\left. \begin{aligned} |Z - 1| &= \frac{2 \sin \frac{\psi_1}{2}}{\cos \bar{\beta}}, \\ |Z + 1| &= \frac{2 \sin \frac{\psi_2}{2}}{\cos \bar{\beta}}. \end{aligned} \right\} \quad (60)$$



Черт. 14.

Таким образом, подставляя из (59) и (60) в (58), получим:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left[e^{i\alpha} \frac{d^2z}{dz dZ} \right] &= \cos \bar{\beta} \cos \theta - \frac{\cos \bar{\beta} \cos \theta}{2} \left[\operatorname{ctg} \frac{\psi_1}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\psi_2}{2} \right] - \frac{2}{\rho} \sin(\psi_3 - \theta) = \\ &= \cos \bar{\beta} \cos \theta - \frac{\cos \bar{\beta} \cos \theta}{2 \sin \frac{\psi_1}{2} \sin \frac{\psi_2}{2}} \sin \frac{\psi_2 - \psi_1}{2} - \frac{2}{\rho} \sin(\psi_3 - \theta). \end{aligned}$$

Для дальнейших подсчетов обозначим через $\bar{\mu}$ угол, под которым из точки Z_0 виден отрезок $(0, i \operatorname{tg} \bar{\beta})$. Имеем:

$$\left. \begin{aligned} \sin \bar{\mu} &= \sin \bar{\beta} \cos \varphi, \\ \psi_1 &= \pi - \varphi + \bar{\mu} - \bar{\beta}, \\ \psi_2 &= \pi + \varphi - \bar{\mu} - \bar{\beta}, \\ \psi_3 &= \frac{\pi}{2} - \bar{\mu}. \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Отсюда

$$\frac{\psi_2 - \psi_1}{2} = \frac{\pi}{2} + \varphi - \bar{\mu},$$

$$\operatorname{Im} \left[e^{i\alpha} \frac{d^2z}{dz dZ} \right] = \cos \bar{\beta} \cos \theta - \frac{\cos \bar{\beta} \sin \theta}{2 \sin \frac{\psi_1}{2} \sin \frac{\psi_2}{2}} \cos(\varphi - \bar{\mu}) - \frac{2}{\rho} \cos(\bar{\mu} + \theta). \quad (62)$$

Займемся оценкой второго слагаемого правой части (62). В силу (56) имеем:

$$|\sin \theta| < |\operatorname{tg} \theta| < \frac{1}{3,9} \operatorname{tg} 2\beta \sin^2 \varphi;$$

отсюда

$$\frac{\sin \theta}{2 \sin \frac{\psi_1}{2} \sin \frac{\psi_2}{2}} < \frac{1}{3,9} \operatorname{tg} 2\beta \sin \varphi \frac{\sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\psi_1}{2} \sin \frac{\psi_2}{2}}. \quad (63)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \sin \bar{\beta} - \sin \bar{\mu} &= (\bar{\beta} - \bar{\mu}) \cos \nu, \quad \bar{\mu} < \nu < \bar{\beta}, \\ \bar{\beta} - \bar{\mu} &= \frac{\sin \bar{\beta} (1 - \cos \varphi)}{\cos \nu} < 2 \operatorname{tg} \bar{\beta} \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 2t. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sin \frac{\psi_1}{2} > \sin \left(-\frac{\varphi}{2} - t \right) > \sin \left(-\frac{\varphi}{2} \right) - t = \sin \frac{\varphi}{2} \left[1 + \operatorname{tg} \bar{\beta} \sin \frac{\varphi}{2} \right].$$

Аналогично

$$\sin \frac{\psi_2}{2} > \cos \frac{\varphi}{2} \left[1 - \operatorname{tg} \bar{\beta} \cos \frac{\varphi}{2} \right].$$

Таким образом, подставляя в (63), получим:

$$\left| \frac{\sin \theta}{2 \sin \frac{\psi_1}{2} \sin \frac{\psi_2}{2}} \right| < \frac{1}{3,9} \operatorname{tg} 2\beta \frac{\sin \varphi}{1 - \operatorname{tg} \bar{\beta} \left(\cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \right)} < \frac{11}{39} \operatorname{tg} 2\beta \sin \varphi,$$

отсюда

$$\left| \frac{\cos \bar{\beta} \sin \theta}{2 \sin \frac{\psi_1}{2} \sin \frac{\psi_2}{2}} \cos (\varphi - \mu) \right| < \frac{11}{39} \operatorname{tg} 2\beta \sin \varphi \cos (\varphi - \mu) < 0,17 \operatorname{tg} 2\beta.$$

Оценим теперь первое и третье слагаемое правой части (62):

$$\begin{aligned} 1 > \cos \bar{\beta} \cos \theta &> 1 - \frac{\bar{\beta}^2}{2} - \frac{\theta^2}{2} > 1 - 0,05 \operatorname{tg} \beta, \\ 2 + 2,2 \operatorname{tg} \beta > \frac{2}{\rho} \cos (\bar{\mu} + \theta) &> 2 (1 - \bar{\mu}^2 - \theta^2) > 2 - 0,2 \operatorname{tg} \beta. \end{aligned}$$

Подставляя найденные предельные значения слагаемых в (61) и производя упрощения, получим:

$$1 - 0,4 \operatorname{tg} \beta < -\operatorname{Im} \left[e^{i\varphi} \frac{d^2 z}{dz dZ} \right] < 1 + 2,5 \operatorname{tg} \beta. \quad (62')$$

Прежде чем применением соотношений (48), (57) и (62') получить окончательную оценку для \bar{K} , выясним, какой следует взять знак перед $K \left| \frac{dz}{dZ} \right|$ в формуле (57).

Пусть M — произвольная точка C , и пусть $K(M)$ — кривизна в этой точке. Проведем через точку M выпуклую дугу γ кривизны меньше $K(M)$ и касающуюся C в точке M . Обозначим через \bar{M} точку $\rho e^{i\varphi}$ ($-\pi < \varphi < 0$), в которую перейдет M при преобразованиях (43), и через $\bar{\gamma}$ дугу, проходящую через \bar{M} , в которую перейдет γ при том же преобразовании. При этих обозначениях очевидно, что $\bar{\gamma}$ в достаточно малой окрестности \bar{M} будет принадлежать области (конечной) ограниченной выпуклой кривой \bar{C} . Следовательно, при уменьшении кривизны K кривой C , кривизна кривой \bar{C} в соответствующей точке $\rho e^{i\varphi}$, $-\pi < \varphi < 0$, будет увеличиваться. Таким образом при определении кривизны \bar{C} в точках $\rho e^{i\varphi}$ нижней полуплоскости $-\pi < \varphi < 0$ перед членом $K \left| \frac{dz}{dZ} \right|$ следует брать знак минус.

Отсюда при $-\pi < \varphi < 0$ имеем:

$$1 - 2,6 \operatorname{tg} \beta < \bar{K} < 1 + 2,5 \operatorname{tg} \beta. \quad (64)$$

Производя аналогичный подсчет для случая $0 < \varphi < \pi$, окончательно, для всех точек кривой \bar{C} , получим:

$$|1 - \bar{K}| < 2,6 \operatorname{tg} \beta.$$

Применяя соотношения, добытые в процессе доказательства (64), нетрудно установить еще одно свойство кривой \bar{C} , важное нам для дальнейшего.

Обозначим через $\bar{\theta}$ угол, образованный нормально к кривой \bar{C} , в точке M этой кривой с отрезком, соединяющим точку M с началом координат. Очевидно, имеем:

$$\bar{\theta} = \theta + \mu.$$

Отсюда пользуясь (56) и (61), получим:

$$\cos \bar{\theta} = \cos \theta \cos \mu - \sin \theta \sin \mu > 1 - \frac{\theta^2}{2} - \frac{\mu^2}{2} - \frac{1}{3,9} \sin \beta_0 \operatorname{tg} 2\beta \sin^2 \varphi \cos \varphi > 1 - 0,51 \operatorname{tg}^2 \beta,$$

$$|\sin \bar{\theta}| = |\cos \theta \sin \mu + \cos \mu \sin \theta| < \frac{1}{3,9} \operatorname{tg} 2\beta \sin^2 \varphi + \sin \beta_0 \cos \varphi < \sqrt{\frac{1}{(3,9)^2} \operatorname{tg}^2 2\beta + \sin^2 \beta_0} < 0,4 \operatorname{tg} \beta. \quad (65)$$

Резюмируем результаты проделанных вычислений. Преобразование (43) реализует конформное отображение внешности дуги C на область, ограниченную простой замкнутой линией \bar{C} , точкам $z = +\infty, -2, +2$ отвечают, соответственно, точки $Z = 0, -1, +1$.

Положение точек $\rho e^{i\varphi}$ кривой \bar{C} ограничивается неравенствами (45). Кривизна \bar{K} кривой \bar{C} удовлетворяет неравенству (64). Угол $\bar{\theta}$ нормали к \bar{C} в точке M с отрезком \overline{OM} удовлетворяет неравенствам (65).

Займемся преобразованием (44). Это преобразование реализует конформное отображение внешности дуги $A_1 B_1$ на круг C' : $|W - i \operatorname{tg} \beta_1| < \frac{1}{\cos \beta_1}$, где $\beta_1 < \beta$; точкам $w = \infty, -2, +2$ отвечают соответственно точки $W = 0, -1, +1$. Пусть

$$W = f(Z) \quad (66)$$

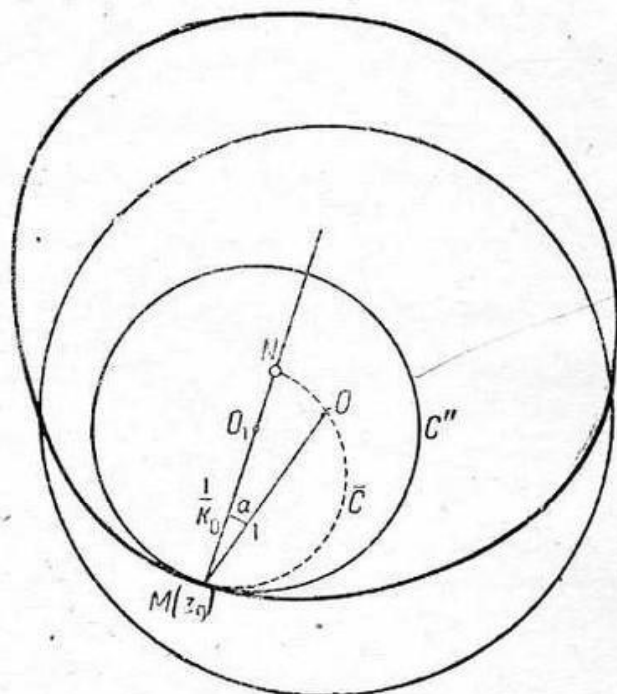
есть функция, реализующая конформное отображение области, ограниченной кривой \bar{C} на круг C' , причем $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ и в силу условий леммы и свойств преобразований (43), (44): $f(-1) = -1$. Нашей ближайшей задачей будет дать верхнюю и нижнюю оценки для $|f'(Z)|$.

Оценим $|f'(Z)|$ снизу для точек $Z = \rho e^{i\varphi}$ дуги \bar{C} (при $-\pi < \varphi < 0$).

Итак, пусть M — произвольная точка кривой \bar{C} с аргументом φ , $-\pi < \varphi < 0$.

Построим круг C'' радиуса $r = \frac{1}{1 + 2,6 \operatorname{tg} \beta}$, принадлежащий области, ограниченной кривой \bar{C} , и касающийся \bar{C} в точке M (черт. 15). Такой круг существует в силу (64). Обозначим через M_1 точку, соответствующую точке M при преобразовании (66), и пусть

$$W = f_1(Z) \quad (67)$$



Черт. 15.

есть функция, реализующая конформное отображение круга C'' на круг C' при следующих условиях: 1) $f_1(0) = 0$; 2) точке M отвечает точка M_1 . В силу известного принципа ¹⁾ в точке M имеем:

$$|f'(Z)| > f'_1(Z). \quad (68)$$

Неравенство (68) будет, очевидно, усилено, если второе условие, определяющее преобразование (67), заменить условием, чтобы точке M отвечала точка окружности C'' с аргументом $-\frac{\pi}{2}$.

Для того чтобы упростить подсчет $|f'_1(Z)|$, заметим предварительно одно элементарное свойство конформных отображений. Пусть в каждой из плоскостей переменных Z и W дано по кругу. Пусть, кроме того, на границе круга C'' плоскости Z дана точка Z_0 , а на границе круга C' дана точка W_0 . Рассмотрим семейство конформных отображений круга C'' на круг C' при условиях: 1) точке Z_0 отвечает точка W_0 ; 2) $\left| \frac{dW}{dZ} \right|_{z=Z_0} = A$, где A есть данное положительное число.

Этими условиями конформное отображение определяется с точностью до произвольной постоянной. При этих построениях, если мы в круге C' фиксируем точку и будем менять произвольную постоянную отображения, то соответствующая точка в круге C'' опишет окружность, касающуюся окружности C'' в точке Z_0 .

Перейдем к подсчету $|f'_1(Z)|$. Проведем через точку $Z = 0$ окружность, касающуюся кривой \bar{C} в точке M , и обозначим через N точку пересечения этой окружности с нормалью к \bar{C} в точке M . В силу сделанного выше замечания, значение $|f'_1(Z)|$ в точке не изменится, если условие $f_1(0) = 0$, определяющее $f_1(Z)$, заменить условием, чтобы точке N отвечала точка $W = 0$. Итак, не нарушая (68), будем считать, что $W = f_1(Z)$ реализует конформное отображение круга C'' на круг C' при условиях: 1) точке N отвечает точка $W = 0$; 2) точке M отвечает точка с аргументом $-\frac{\pi}{2}$.

Обозначим через O_1 центр круга C'' . Имеем:

$$\overline{MO_1} = r = \frac{1}{1 + 2,6 \operatorname{tg} \beta},$$

$$\overline{MN} = \frac{\rho}{\cos \theta}, \quad \rho < 1.$$

Отсюда преобразование (67) можно представить как результат двух следующих преобразований:

$$\zeta = -ir \frac{(Z - a) e^{-i\psi} + h}{r^2 + h(Z - a) e^{-i\psi}}, \quad (69)$$

$$W = R \frac{R\zeta - ih_1}{R + ih_1\zeta} + ih_1, \quad (70)$$

где ψ есть угол отображения, образованный вектором $\overline{O_1M}$ с действительной осью, a есть число, изображаемое точкой O_1 , и где для простоты положено:

$$h = O_1N_1 = \frac{\rho}{\cos \theta} - r,$$

$$R = \frac{1}{\cos \beta_1}, \quad h_1 = \operatorname{tg} \beta_1$$

(R есть радиус круга C' , а h_1 есть расстояние от начала координат до центра круга C'). При этих обозначениях точка M будет изображать число $Z = -re^{i\psi} + a^2$.

¹⁾ См. примечание на стр. 8.

²⁾ Преобразование (69) дает конформное отображение C'' на единичный круг $|\zeta| < 1$, а преобразование (70) дает конформное отображение единичного круга на круг C' , причем точке M при преобразовании (69) будет отвечать точка $\zeta = -i$.

Дифференцируя (69) и (70), получим:

$$|f'_1(Z)| = rR \frac{r^2 - h^2}{|r^2 - h(Z-a)e^{-i\psi}|^2} \frac{R^2 - h_1^2}{|R + ih_1\zeta|^2}$$

Подставляя $Z = re^{i\psi} + a$ и $\zeta = -i$, найдем:

$$|f'_1(Z)| = \frac{1}{r} \frac{1 - \frac{h}{r}}{1 + \frac{h}{r}} \cdot \frac{1 - \frac{h_1}{R}}{1 + \frac{h_1}{R}} = \frac{2 - \frac{\rho}{r \cos \theta}}{\frac{\rho}{r \cos \theta}} \frac{1 - \sin \beta_1}{\cos \beta (1 + \sin \beta_1)} \geq$$

$$\geq \left(2 \frac{r}{\rho} \cos \bar{\theta} - 1\right) \frac{1 - \sin \beta_1}{1 + \sin \beta_1} > (2 - 1,1 \operatorname{tg}^2 \beta - 1 - 2,6 \operatorname{tg} \beta) (1 - 2 \operatorname{tg} \beta) > 1 - 4,8 \operatorname{tg} \beta.$$

Итак, окончательно, для всех точек $Z = \rho e^{i\varphi}$, $-\pi < \varphi < 0$ дуги \bar{C} имеем:

$$|f'(z)| > 1 - 5 \operatorname{tg} \beta. \quad (71)$$

Полученное неравенство (71) дает искомую нижнюю оценку для $|f'(z)|$. Чтобы получить для $|f'(z)|$ оценку сверху, нужно вместо „вписанного“ в кривую \bar{C} круга C'' построить круг радиуса $\frac{1}{1 - 2,6 \operatorname{tg} \beta}$, содержащий кривую \bar{C} и касающийся \bar{C} в точке M . Производная функции, реализующей конформное отображение построенного круга на круг C' , дает, аналогично предыдущему, верхнюю оценку для $|f'(z)|$. Производя нужные подсчеты, получим, что в каждой точке $Z = \rho e^{i\varphi}$, $-\pi < \varphi < 0$, имеем:

$$|f'(z)| < 1 + 4,8 \operatorname{tg} \beta. \quad (72)$$

Перейдем к доказательству леммы. Связь между z и w , устанавливаемая соотношениями (43), (44) и (66), реализует конформное отображение внешности дуги AB на внешность дуги A_1B_1 :

$$w = F(z).$$

Следовательно,

$$|F'(z)| = \left| \frac{dw}{dW} \right| \cdot \left| \frac{dW}{dZ} \right| \cdot \left| \frac{dZ}{dz} \right|.$$

Отсюда, считая $z = Z_0$ расположенной на дуге и пользуясь (48), (71) и (72) для нужного значения $|F'(z)|$, получим:

$$|F'(z_0)| > (1 - 4,8 \operatorname{tg} \beta) \frac{2 \sin \varphi_1 (1 + k^2 \operatorname{tg} \beta_1)}{2 \sin \varphi (1 + k'_1 \operatorname{tg} \beta_2)},$$

$$|F'(z_0)| < (1 + 4,8 \operatorname{tg} \beta) \frac{2 \sin \varphi_1 (1 + k_2 \operatorname{tg} \beta_1)}{2 \sin \varphi (1 + k'_2 \operatorname{tg} \beta_2)},$$

где φ и φ_1 есть аргументы точек кривых \bar{C} , C' , соответствующих точке z_0 ; кроме того,

$$\begin{cases} |1 - k_2| < 0,2, & 0 < \beta_1 < \beta, \\ |1 - k'_2| < 0,2, & 0 < \beta_2 < \beta. \end{cases}$$

Следовательно,

$$|F'(z_0)| > \frac{1 - 4,8 \operatorname{tg} \beta \sin \varphi_1}{1 + 1,2 \operatorname{tg} \beta \sin \varphi} > (1 - 6 \operatorname{tg} \beta) \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi}, \quad |F'(z_0)| < (1 + 6,3 \operatorname{tg} \beta) \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi}. \quad (73)$$

Нам остается оценить отношение $\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi}$.

Имеем:

$$d\varphi_1 < |f'(Z)| \rho \cos \bar{\theta} d\varphi^1 < (1 - 4,8 \operatorname{tg} \beta) (1 - \operatorname{tg} \beta) (1 - 0,6 \operatorname{tg}^2 \beta) d\varphi < (1 - 6 \operatorname{tg} \beta) d\varphi,$$

$$d\varphi_1 > |f'(Z)| \frac{d\varphi}{\rho \cos \mu} > \frac{1 + 4,8 \operatorname{tg} \beta}{(1 - \operatorname{tg} \beta)(1 - 0,6 \operatorname{tg}^2 \beta)} d\varphi > (1 + 6 \operatorname{tg} \beta) d\varphi.$$

¹⁾ Здесь φ и φ_1 меняются в пределах от $-\pi$ до 0.

Так как при $\varphi = 0, -\pi$ имеем $\varphi_1 = 0, -\pi$, то:

$$\varphi_1 < (1 - 6 \operatorname{tg} \beta) \varphi,$$

$$\varphi_1 > (1 + 6 \operatorname{tg} \beta) \varphi,$$

причем при подсчете $\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi}$ достаточно рассмотреть случай $-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$.

Таким образом

$$\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi} < \frac{\sin (1 + 6 \operatorname{tg} \beta) \varphi}{\sin \varphi} \leq 1 + 6 \operatorname{tg} \beta,$$

$$\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi} > \frac{\sin (1 - 6 \operatorname{tg} \beta) \varphi}{\sin \varphi} > 1 - 6 \operatorname{tg} \beta.$$

Подставляя в (73), окончательно получим:

$$\left. \begin{aligned} |F'(z_0)| &> 1 - 12 \operatorname{tg} \beta > 1 - \frac{12K}{\cos^2 \beta} > 1 + 13K, \\ |F'(z_0)| &< 1 + 13,5 \operatorname{tg} \beta < 1 + 14K. \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

Мы нашли искомые оценки для $|F'(z_0)|$ в предположении, что длина хорды AB равна 4. Допустим теперь, что длина отрезка AB равна $4H$, и пусть

$$w = F(z)$$

есть функция, реализующая конформное отображение внешности дуги AB на внешность дуги A_1B_1 в условиях леммы. Строим функцию

$$w = HF\left(\frac{z}{H}\right) = F_1(z).$$

Эта функция реализует конформное отображение внешности дуги, хорда которой равна 4, а кривизна не больше HK^1), на внешность дуги окружности, хорда которой также равна 4²⁾. Кроме того,

$$F_1'(z) = F'\left(\frac{z}{H}\right).$$

Следовательно, в силу разобранных частных случаев, имеем:

$$\left. \begin{aligned} [F'(z_0)] &> 1 - 13HK > 1 - 13IK, \\ [F'(z_0)] &< 1 + 14HK < 1 + 14IK. \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

Это и есть искомые окончательные оценки для $[F'(z_0)]$.

4. Пользуясь только что доказанной леммой, мы дадим сейчас количественную оценку изменения подъемной силы дуги, когда дуга AB получает некоторую бесконечно малую вариацию.

Лемма VI. Пусть в плоскости комплексного переменного даны две дуги C и C_1 . Дуга C имеет длину l , выпукла, и кривизна ее не превосходит число $K < \frac{1}{21l}$. Дуга C_1 бесконечно близка к дуге C , концы C_1 , A и B совпадают с концами C ; дуга C_1 расположена с выпуклой стороны дуги C , и если через ρ обозначить расстояние от точки M дуги C до дуги C_1 , то

$$\rho = \rho(s) > \varepsilon s \quad \text{при } s < \frac{l}{2},$$

$$\rho = \rho(s) > \varepsilon(l - s) \quad \text{при } s > \frac{l}{2},$$

где s есть расстояние от точки A до точки M , измеренное по дуге C , а ε — константа (бесконечно малая).

¹⁾ Кривизна дуги AB не больше $K < \frac{1}{21H}$.

²⁾ $F_1(\infty) = \infty$, концы дуг соответствуют друг другу.

Отобразим конформно внешность дуги C и внешность контура, составленного из дуг C и C_1 , на внешность круга $|w| < 1$ при условии соответствия бесконечно удаленных точек. Обозначим через 2θ и $2\theta_1$ дуги окружности $|w| = 1$, в которые перейдет при этих отображениях соответственно вогнутая часть C и дуга C_1 .

При этих условиях имеем:

$$\frac{\cos \theta_1}{\cos \theta} > 1 + \frac{\varepsilon}{4} \frac{1 - 13IK}{1 + 14IK} \operatorname{ctg} \frac{IK}{4}. \quad (76)$$

Доказательство. Отообразим конформно

$$Z = F(z)$$

внешность дуги AB на внешность дуги окружности A_1B_1 , определенной в условиях леммы V при условиях соответствия бесконечно удаленных точек и концов дуг AB и A_1B_1 . В силу леммы V в каждой точке z_0 дуги C при подходе к этой точке с выпуклой стороны дуги AB $[F'(z_0)]$ удовлетворяет неравенствам (75). Обозначим через C' дугу, в которую при этих отображениях перейдет дуга C_1 , и обозначим через ρ_1 расстояние от точки M_1 дуги A_1B_1 до дуги C' , считая, что точка M_1 соответствует точке M ; обозначим через σ расстояние от A_1 до M_1 , измеренное по дуге A_1B_1 . В силу основного свойства конформных отображений имеем:

$$\rho_1 = \rho_1(\sigma) = \rho(s) \frac{d\sigma}{ds}.$$

Кроме того, в силу леммы V:

$$\frac{d\sigma}{ds} > 1 - 13IK,$$

$$\frac{d\sigma}{ds} < 1 + 14IK.$$

Следовательно,

$$s > \frac{\sigma}{1 + 14IK}.$$

Отсюда, обозначая через l_1 длину дуги A_1B_1 при $\sigma < \frac{l_1}{2}$, имеем:

$$\rho_1 > \varepsilon \frac{1 - 13IK}{1 + 14IK} \sigma.$$

Аналогично, при $\sigma > \frac{l_1}{2}$

$$\rho_1 > \varepsilon \frac{1 - 13IK}{1 + 14IK} (l_1 - \sigma).$$

Если мы конформно отобразим внешность дуги A_1B_1 на внешность круга $|w| < 1$, то, очевидно, вогнутой стороне дуги A_1B_1 будет отвечать на окружности $|w| = 1$ дуга 2θ . Аналогично, при конформном отображении внешности контура, состоящего из дуг A_1B_1 и C' , на внешность круга $|w| < 1$ дуге A_1B_1 будет отвечать дуга $2\theta_1$. В силу принципа, использованного при доказательстве теоремы I, число $\cos \theta_1$ уменьшится, если дугу C' заменить дугой C'' с концами в точках A_1 и B_1 и расположенной между дугами A_1B_1 и C' . Примем за C'' дугу окружности, образующую в точках A_1 и B_1 с дугой A_1B_1 угол α ,

$$\operatorname{tg} \alpha = \varepsilon \frac{1 - 13IK}{1 + 14IK}.$$

Теперь, для получения искомой оценки для $\frac{\cos \theta_1}{\cos \theta}$, достаточно отобразить конформно внешность луночки, образованной дугами A_1B_1 и C'' на внешность круга $|w| < 1$. Обозначая через $2\theta_2$ дугу окружности $|w| = 1$, соответствующую при этом

отображении дуге A_1B_1 , и через 2λ угловую меру дуги A_1B_1 , в силу известных формул¹⁾ будем иметь:

$$\theta_2 = \frac{\pi - \lambda - \alpha}{2 - \frac{\alpha}{\pi}}.$$

Считая по условиям задачи α бесконечно малым и пренебрегая бесконечно-малыми высших порядков, будем иметь:

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\lambda}{2} - \frac{\alpha}{4} \left(1 + \frac{\lambda}{\pi}\right),$$

отсюда

$$\cos \theta = \sin \frac{\lambda}{2},$$

$$\cos \theta_1 > \cos \theta_2 = \sin \frac{\lambda}{2} + \frac{\alpha}{4} \left(1 + \frac{\lambda}{\pi}\right) \cos \frac{\lambda}{2}.$$

Таким образом

$$\frac{\cos \theta_1}{\cos \theta} > 1 + \frac{\alpha}{4} \operatorname{ctg} \frac{\lambda}{2}.$$

Или окончательно

$$\frac{\cos \theta_1}{\cos \theta} > 1 + \frac{\varepsilon}{4} \frac{1 - 13IK}{1 + 14IK} \operatorname{ctg} \frac{IK}{4}.$$

Добавляя к формуле (76) качественные результаты, добытые нами в первом параграфе, мы непосредственно получаем следующую более общую оценку:

ТЕОРЕМА II. Если дуги C и C_1 удовлетворяют условиям леммы VI и если через P и P_1 обозначить подъемные силы этих дуг, то

$$\frac{P_1}{P} > 1 + \frac{\varepsilon}{4} \frac{1 - 13IK}{1 + 14IK} \operatorname{ctg} \frac{IK}{4}, \quad (77)$$

где ε — бесконечно малая величина.

5. Перейдем к доказательству основной теоремы. Рассмотрим совокупность простых дуг (класс допустимых линий), обладающих следующими свойствами:

1) длина каждой дуги не больше l ;

2) кривизна каждой дуги в каждой точке не больше $K < \frac{1}{21l}$;

3) обозначая через A и B концы произвольной дуги семейства, каждая дуга семейства содержит дуги AA_1 и BB_1 постоянной кривизны K и длины ε , где ε — данное положительное число, одно и то же для всех кривых семейства.

Докажем, что среди всех кривых описанного семейства наибольшей подъемной силой будет обладать дуга окружности радиуса $\frac{1}{K}$.

Из этого будет, очевидно, следовать, что дуга окружности будет обладать наибольшей подъемной силой также среди семейства дуг, удовлетворяющих лишь условиям 1) и 2). Основная теорема этим самым будет доказана.

Добавочное ограничение на класс допустимых линий мы налагаем для того, чтобы воспользоваться леммой IV. Заметим, что лемму IV можно доказать, несколько усложняя доказательство, не делая дополнительной гипотезы относительно поведения дуги вблизи концов A и B ; в таком случае доказательство основной теоремы можно вести прямо, не вводя вспомогательного класса допустимых линий.

Итак, допустим, от противного, что среди принятого класса допустимых линий дуга AB , обладающая наибольшей подъемной силой²⁾, не есть дуга окружности кривизны K . В таком случае на дуге существует точка $M(s_0)$ ³⁾ такая, что при всех достаточно малых Δs имеем:

$$\frac{\varepsilon}{\Delta s} < K - a,$$

¹⁾ Голубев, Теория крыла аэроплана, стр. 101—103.

²⁾ В силу теоремы I эта дуга выпуклая, что мы будем во всем дальнейшем предполагать.

³⁾ s_0 есть расстояние от A до M , измеренное по дуге.

где τ есть угол смежности — угол, образованный касательными в точках $M(s_0)$ и $M(s_0 + \Delta s)$, и где a есть некоторое положительное число, не зависящее от Δs .

Величину Δs во всем дальнейшем мы будем предполагать бесконечно малой, и всеми ее высшими степенями будем пренебрегать. Кроме того, не нарушая общности, будем считать $s_0 > \frac{l}{2}$.

Построим дугу $AM(s_0)M'B_1$ (черт. 16). Эта дуга обладает непрерывно вращающейся касательной, ее часть $AM(s_0)$ принадлежит дуге AB , ее часть $M(s_0)M'$ имеет длину Δs и кривизну K и, наконец, ее часть $M'B$ конгруэнтна дуге $M(s_0 + \Delta s)B$; эту часть мы, очевидно, получим, перемещая дугу $M(s_0 + \Delta s)B$ поступательно на величину порядка Δs^2 и поворачивая ее на угол α :



Черт. 16.

$$\alpha > K\Delta s - (K - a)\Delta s = a\Delta s. \quad (78)$$

Имеем:

$$\overline{BB_1} = \overline{M(s_0)B} \cdot \alpha. \quad (79)$$

Повернем теперь построенную дугу AB_1 около точки A на угол β , такой, чтобы ее свободный конец B_1 попал на дугу AB , новое положение этого конца обозначим через B' , а всю дугу будем обозначать через AB' . Нашей задачей является теперь оценить сверху длину отрезка BB' и оценить снизу расстояние от произвольной точки дуги AB до дуги AB' . Для этих подсчетов введем ряд новых обозначений. Пусть N (черт. 17) есть точка пересечения отрезка MB с отрезком B_1B' , ϑ есть угол, образованный дугой $M(s_0)B$ с ее хордой \overline{MB} в точке B , σ есть угол, образованный дугой AB' с ее хордой $\overline{AB'}$; кроме того, положим:

$$\overline{M(s_0)B} = h,$$

$$\overline{AB} = H.$$

Из треугольника MVB_1 имеем:

$$\overline{MB} = h\alpha \operatorname{tg} \vartheta.$$

Отсюда, рассматривая треугольник MVB' , получим:

$$\overline{BB'} = \frac{\overline{MB}}{\cos(\vartheta + \sigma)} \cos \vartheta = h\alpha \frac{\sin \vartheta}{\cos(\vartheta + \sigma)}.$$

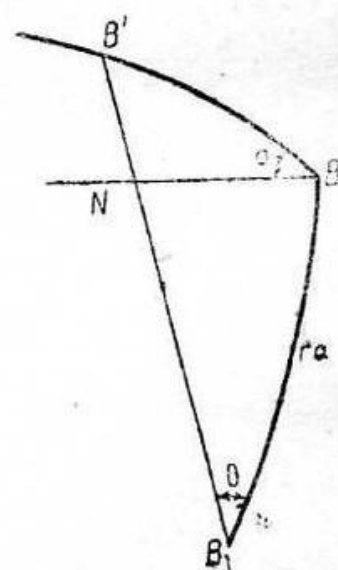
Кроме того, очевидно,

$$\vartheta + \sigma < \frac{lK}{2},$$

$$\vartheta < \frac{s_0 K}{2}.$$

Таким образом

$$\overline{BB'} < \alpha(l - s_0) \frac{\sin \frac{s_0 K}{2}}{\cos \frac{lK}{2}}. \quad (80)$$



Черт. 17.

Перейдем ко второй оценке. Для этой цели вычислим, прежде всего, угол поворота β дуги $AM(s_0)B_1$. Имеем:

$$\overline{B_1B'} = B_1N + NB' = \frac{h\alpha}{\cos \vartheta} + NB,$$

$$NB' = h\alpha \operatorname{tg} \vartheta \frac{\sin \sigma}{\cos(\vartheta + \sigma)},$$

отсюда

$$\overline{B_1B'} = h\alpha \left\{ \frac{1}{\cos \theta} + \operatorname{tg} \theta \frac{\sin \sigma}{\cos(\theta + \sigma)} \right\} > \frac{h\alpha}{\cos \theta}.$$

Следовательно, принимая во внимание условие $Kl > \frac{1}{2l}$, имеем:

$$\overline{B_1B'} > 0,9\alpha(l - s_0).$$

Таким образом

$$\beta = \frac{B_1B'}{H} < \frac{0,9\alpha}{l}(l - s_0).$$

Пусть теперь $\rho \perp \rho(s)$ есть расстояние от точки $M(s)$ дуги AB до дуги AB' ¹⁾. При $s < s_0$ имеем:

$$\rho = \overline{AM}\beta \cos \sigma',$$

где σ' есть угол, образованный дугой AM с ее хордой \overline{AM} в точке M . Отсюда при $s < s_0$ получим:

$$\rho > 2\beta \frac{1}{K} \sin \frac{sK}{2} \cos \frac{sK}{2} > \frac{0,9\alpha}{l} s (l - s_0). \quad (81)$$

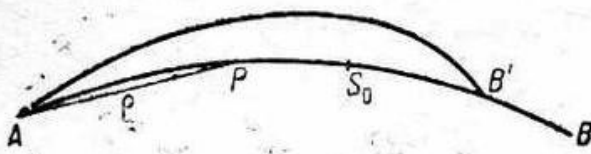
Вполне подобный элементарный подсчет, с учетом условия $lK < \frac{1}{2l}$ при $s > s_0$ нам дает:

$$\rho > \frac{0,8\alpha}{l} s_0 (l - s). \quad (82)$$

Пользуясь гипотезой $s_0 > \frac{l}{2}$ ²⁾, неравенствам (81) и (82) можно придать более симметричный вид:

$$\left. \begin{aligned} \rho &> \frac{0,8(l - s_0)}{l} \alpha s, & \text{при } s < \frac{l}{2}, \\ \rho &> \frac{0,8(l - s_0)}{l} \alpha (l - s), & \text{при } s > \frac{l}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (82')$$

Подсчитаем теперь изменение подъемной силы при переходе от дуги AB к дуге AB' , которая в силу построения принадлежит классу допустимых линий.



Черт. 18.

Переход от дуги AB к дуге AB' разобьем на две части (черт. 18): 1) от дуги AB отбрасывается кусок $B'B$ и 2) полученную дугу AMB' заменяем дугой AB' . Вариация подъемной силы $\delta_1 P$ при первой деформации, в силу лемм II, IV и формулы (80), будет:

$$\begin{aligned} \delta_1 P &= - \frac{\cos \theta}{|f'(\infty)|^2} \delta |f'(\infty)| - \frac{\sin \theta d\theta}{|f'(\infty)|} > \\ &> - P \left\{ \frac{K}{\sin \frac{lK}{2}} + 0,6 \frac{K}{\cos \theta} \right\} \alpha (l - s_0) \frac{\sin \frac{s_0 K}{2}}{\cos \frac{lK}{2}}. \end{aligned} \quad (83)$$

Оценим снизу $\cos \theta$. Так как по основной гипотезе дуга AB дает наибольшую подъемную силу, то, следовательно, подъемная сила AB не меньше подъемной силы дуги окружности длины l и кривизны K . Отсюда, применяя теорему С. А. Чаплыгина о подъемной силе дуги окружности, получим:

$$\frac{\cos \theta}{|f'(\infty)|} \geq \frac{\sin^2 \frac{lK}{4}}{K}.$$

¹⁾ Расстояние измеряем по нормали к дуге AB в точке $M(s)$.

²⁾ Если бы $s_0 < \frac{l}{2}$, то мы при деформации AB роль A и B меняем местами.

Следовательно,

$$\cos \theta \geq \frac{|f'(\infty)|}{K} \sin^2 \frac{IK}{4} \quad (84)$$

Нам остается оценить снизу $|f'(\infty)|$. Для этой цели построим две дуги кривизны K , симметричные относительно отрезка \overline{AB} и имеющие концы в точках A и B . Эти дуги образуют контур, содержащий дугу \overline{AB} ; следовательно, если через $\bar{f}(z)$, $\bar{f}(\infty) = \infty$, обозначить функцию, реализующую конформное отображение внешности построенного контура на внешность круга $|w| < 1$, то будем иметь:

$$|f'(\infty)| > |\bar{f}'(\infty)|.$$

Но

$$\bar{f}(z) = \frac{\left(1 - \frac{l_1}{z}\right)^n + 1}{\left(1 - \frac{l_1}{z}\right)^n - 1}, \quad (85)$$

где положено: $l_1 = \overline{AB} < l$, $n = \frac{\pi}{2\pi - IK}$.

Дифференцируя (85) и подставляя $z = \infty$, получим:

$$|f'(\infty)| > |\bar{f}'(\infty)| = \frac{4\pi - IK}{2\pi l}.$$

Следовательно,

$$\cos \theta > \frac{4\pi - IK}{2\pi IK} \sin^2 \frac{IK}{4}.$$

Подставляя в (83) и пользуясь условием $Kl < \frac{1}{21}$, получим:

$$\delta_1 P > -P \left\{ \frac{K}{\sin \frac{IK}{2}} + 0,1 \frac{IK^2}{\sin^2 \frac{IK}{4}} \right\} \alpha (1 - s_0) \frac{\sin \frac{s_0 K}{2}}{\cos \frac{IK}{2}}.$$

Вариация подъемной силы, $\delta_2 P$, получаемая при второй деформации дуги, в силу теоремы II и формулы (82') будет:

$$\delta_2 P > P \frac{0,8(1 - s_0) \alpha}{4l} \frac{1 - 13IK}{1 + 14IK} \operatorname{ctg} \frac{IK}{4}.$$

Отсюда, обозначая через δP полную вариацию подъемной силы при переходе от дуги AB к дуге AB' , получим:

$$\delta P = \delta_1 P + \delta_2 P \geq P \alpha \frac{1 - s_0}{l} \left\{ 0,2 \frac{1 - 13IK}{1 + 14IK} \operatorname{ctg} \frac{IK}{4} - \frac{IK}{\sin \frac{IK}{2}} \frac{\sin \frac{s_0 K}{2}}{\cos \frac{IK}{2}} - 0,1 \frac{IK^2}{\sin^2 \frac{IK}{4}} \frac{\sin \frac{s_0 K}{2}}{\cos \frac{IK}{2}} \right\}.$$

При $IK < \frac{1}{21}$ имеем:

$$\delta P > 0,$$

т. е. дуга AB' , принадлежащая классу допустимых линий, дает большую подъемную силу, чем дуга AB , что противоречит допущению, сделанному в самом начале.

6. Решенная нами вариационная задача из теории крыла в плоско-параллельном потоке представляет собою одну из простейших задач целой группы вариационных задач, которые могут быть здесь поставлены. Простота ответа в значительной мере обусловлена выбором класса допустимых линий задачи и условием полного обтекания. Отметим, что многие вариационные задачи, имеющие актуальное значение в теории крыла, будучи поставлены при условии полного обтекания крыла невихревым потоком, приводят к решениям, мало интересным для гидродинамики. Применением леммы I можно, например, показать что: 1) среди всех дуг с данной хордой AB , данной стрелой прогиба, и расположенных в полосе, ограниченной перпендикулярами к AB в точках A и B , наибольшей подъемной силой будет

обладать дуга, составленная из трех сторон прямоугольника; 2) если в условиях описанного выше класса допустимых линий отбросить последнее, то задача решения не имеет, — можно, увеличивая размеры дуги, получить сколь угодно большую подъемную силу. Несколько менее просто, но теми же методами можно показать, что среди дуг данной длины, соединяющих две данные точки, наибольшей подъемной силой обладает дуга, у которой в концах имеют место спиралевидные особенности.

Ввиду этого, сохраняя гипотезу плоско-параллельного потока, дальнейшие исследования по выявлению „наивыгоднейших“ форм обтекаемых дуг, тонких и толстых, следует вести с учетом срыва струи, используя, например, теорию пограничного слоя, попытаться найти форму крыла, при которой точки срыва были бы возможно близки к задней кромке. Заметим, что эти задачи неизмеримо труднее разработанных нами выше. .

ZUSAMMENFASSUNG

In dieser Arbeit versucht der Verfasser sich der Lösung der Aufgabe über die „günstigste“ Form des Tragflügels zu nähern. Die ganze Untersuchung wird unter der Voraussetzung einer idealen zweidimensionalen Strömung einer unkompressiblen Flüssigkeit geführt, die ein dünnes Profil (Bogen) umfließt; ausserdem wird vorausgesetzt, dass der vordere und hintere Verzweigungspunkt der Strömung mit dem Anfang bzw. Ende des Bogens zusammenfallen. (Die Strömungsgeschwindigkeit ist überall endlich.

Wenn unter dem „Auftrieb“ des betreffenden Bogens die Resultierende der Druckkräfte auf den Bogen verstanden wird und die Geschwindigkeit im Unendlichen sowie die Dichte der Flüssigkeit konstant bleiben, so beweist der Verfasser folgende Sätze:

1. Unter allen Bogen beschränkter Krümmung (in allen Punkten des Bogens nicht grösser als K), welche zwei gegebene Punkte A und B verbinden ($\overline{AB} > \frac{2}{K}$), und im Kreise mit dem Durchmesser \overline{AB} liegen, hat den grössten Auftrieb der Kreisbogen mit dem Radius $\frac{1}{K}$.

2. Unter allen Bogen von der Länge l und einer Krümmung in jedem Punkte nicht grösser als K ($K \leq \frac{1}{u} \frac{1}{l}$) hat den grössten Auftrieb der Kreisbogen vom Radius $\frac{1}{K}$.

