THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur la représentation conforme.* Note [1] de MM. **V. Chepeleff** et **M. Lavrentieff**, présentée par M. Hadamard.

Le but de cette Note est d'indiquer quelques propriétés nouvelles des fonctions analytiques univalentes.

1. Pour démontrer les propositions qui suivent, le lemme suivant est essentiel :

Lemme. — *Soit $\mathcal{D}^*$ le domaine qu'on obtient en enlevant du demi-plan $\mathcal{I}(w) > 0$, $w = u + iv$, un continu* F *contenant un point de l'axe réel et contenu dans le demi-plan* $\mathrm{R}(w) > 0$. *Désignons par $\mathcal{D}$ le domaine simplement connexe maximal contenant le point $w = i$ et contenu dans $\mathcal{D}^*$. Alors, si $w = f(z)$, $f(0) = 0$, $f(i) = i$ est la fonction qui réalise la représentation conforme du demi-plan $\mathcal{I}(z) > 0$ sur le domaine $\mathcal{D}$, nous avons* $\mathrm{R}[f(iy)] < 0$ *pour* $0 < y < 1$.

Pour démontrer ce lemme, nous considérons d'abord le cas particulier où le continu F est un segment rectiligne infiniment petit et formant avec l'axe imaginaire un angle infiniment petit du même ordre. Dans ce cas, on obtient le résultat nécessaire au moyen de la formule de Christoffel-Schwarz. On en déduit que le lemme est encore vrai si F est un arc simple analytique. Le cas général s'obtient immédiatement en appliquant le théorème connu de M. Carathéodory sur les familles de fonctions univalentes.

En réalisant quelques représentations conformes, on déduit de ce lemme les théorèmes suivants :

Théorème I. — *Soit $\mathcal{D}$ un domaine simplement connexe contenant le cercle $|z| < 1$. Alors, dans la représentation conforme $w = f(z)$, $f(0) = 0$ du domaine $\mathcal{D}$ sur le cercle $|w| < 1$, il correspond au cercle $|z| < \mathrm{R} \leqq 1$ un domaine étoilé* [2].

Théorème II. — *Quel que soit le domaine $\mathcal{D}$ simplement connexe contenant le point $z = 0$ et dont la frontière a pour tangente l'axe réel au point $z = 1$, la fonction $w = f(z)$, $f(0) = 0$ qui réalise la représentation conforme du domaine $\mathcal{D}$ sur le cercle $|w| < 1$, ne peut être régulière et univalente dans le cercle $|z| < \mathrm{R} > 1$.*

---

[1] Séance du 22 décembre 1930.

[2] On appelle domaine étoilé tout domaine simplement connexe contenant le point $w = 0$ et tel que chaque demi-droite issue de ce point coupe la frontière du domaine en un seul point.

2. En appliquant le théorème I et un théorème de M. Lavrentieff [1], on obtient le résultat suivant :

THÉORÈME. — *Soit $w = f(z)$ une fonction réalisant la représentation conforme du cercle $|z| < 1$ sur un domaine $\mathcal{D}$ simplement connexe; on suppose $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. Considérons, dans le plan $w$, $n$ demi-droites issues de l'origine et formant des angles égaux. Dans ce cas, la partie de l'une au moins de ces demi-droites située dans le cercle $|w| < \frac{1}{\sqrt[n]{4}}$ appartient au domaine $\mathcal{D}$.*

La constante $\frac{1}{\sqrt[n]{4}}$ ne peut pas être remplacée par une constante inférieure sans que le théorème cesse d'être vrai [2].

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Une propriété générale des fonctions entières d'ordre infini.* Note [3] de M. **Henri Milloux**, transmise par M. Émile Borel.

1. On sait que toute fonction entière $f(z)$ d'ordre fini $\rho$ supérieur à $\frac{1}{2}$ possède au moins deux demi-droites de Borel; d'une façon un peu plus précise, il existe au moins deux suites de cercles $C_n$, $C'_n$ (cercles de remplissage), tels que dans chacune des suites, l'exposant de convergence des zéros de $f(z) - a$ est égal à $\rho$, sauf pour une valeur finie de $a$ au plus. Les cercles $C_n$, $C'_n$ sont contenus dans la même couronne circulaire :

$$r_n^{1-\varepsilon_n} \leq |z| \leq r_n^{1+\varepsilon_n} \qquad (\lim \varepsilon_n = 0).$$

Ils sont vus de l'origine sous des angles qui tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$ et la différence des arguments de leurs centres est bornée inférieurement par un nombre positif ne dépendant que de $\rho$.

2. *Une propriété analogue est valable pour les fonctions entières d'ordre infini.*

On ne peut, bien entendu, songer à démontrer l'existence de deux demi-droites analogues aux demi-droites de Borel, puisqu'il existe des fonctions

---

(1) *Comptes rendus*, **191**, 1930, p. 827.

(2) Les cas où $n = 1, 2$ sont classiques; dans les cas $n = 3, 4$, le problème a été résolu par M. Kotchine (*Bulletin du 1er Congrès des Mathématiciens de l'U.R.S.S. à Kharkow*, 1930; sous presse).

(3) Séance du 22 décembre 1930.