Puisque $f(x) \to S$, on conclut de (4) que $\lim_{x \to \infty} j = S$, ce qui démontre le théorème.

II. *Si la série* (2) *est sommable* (B, φ) *la série* (1) *sera aussi sommable* (B, φ) *avec la même somme.*

III. *Soit la série* $\sum_0^\infty u_n$ *sommable* (B, φ) *avec la somme* S, *la série* $\sum_0^\infty v_n$ *soit sommable* (B, ψ) *avec la somme t, alors la série* $\sum_0^\infty w_n$ *où*

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \ldots + u_0 v_n$$

sera sommable (B, τ) *avec la somme* St, *où*

$$\tau(x) = \int_0^x \varphi_1(t)\,\psi(x-t)\,dt,$$

IV. *Si une série est sommable* (B, φ) *avec la somme* S *et sommable* (B, ψ) *avec la somme t, on aura s = t.*

Si l'on pose $\varphi(x) = x^{\alpha-t}$, $\alpha > 0$, on obtient les résultats de M. Doetsh (¹), qui étaient le point de départ des nôtres.

Il est évident qu'on peut aussi appliquer avec succès cette sommation dans la théorie des équations différentielles comme la sommation absolue de M. Borel (²).

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur un problème de maximum dans la représentation conforme.* Note (³) de M. **M. Lavrentieff**, transmise par M. Hadamard.

Le but de cette Note est de résoudre le problème suivant : *parmi toutes les fonctions* $w = f(z)$ *univalentes dans le cercle* $|z| < 1$, $f(0) = 0$, $f'(0)$ — *réel et qui dans ce cercle ne prennent aucune des n valeurs données* $a_1, a_2, \ldots, a_n$, *trouver la fonction* $f(z)$ *pour laquelle* $f'(0)$ *est maximum.*

1. *Lemmes préliminaires.* — Soit $\mathcal{D}$ un domaine simplement connexe contenant les points $w = 0$ et $w = w_0$. Faisons la représentation conforme, $w = F(z)$, du domaine $\mathcal{D}$ sur le cercle $|z| < 1$, $F(0) = 0$. Soit $w_0 = F(z_0)$.

(¹) G. Doetsch, *Inaugural-Dissertation*, Göttingen, 1920; 56 pages (*Mathematische Zeitschrift*, **11**, 1921, p. 161-179.

(²) Émile Borel, *Leçons sur les séries divergentes*, 2ᵉ édition, 1928, p. 148-151.

(³) Séance du 27 octobre 1930.

En enlevant du cercle $|z|<1$ le segment $[z_0, e^{i\arg z_0}]$ faisons la représentation conforme du domaine ainsi obtenu sur le cercle $|Z|<1$, $z=\varphi(Z)$, $\varphi(0)=0$. Posons $\psi_1(Z)=F[\varphi(Z)]$.

Lemme I. — *Quelle que soit la fonction $w=f(z)$ univalente dans le cercle $|z|<1$, $f(0)=0$, dont toutes les valeurs, pour $|z|<1$, appartiennent à $\mathcal{D}$ et qui ne prend pas la valeur w_0, nous avons $|f'(0)|\leqq|\psi'_1(0)|$.*

Soit, maintenant, $\mathcal{D}$ un domaine doublement connexe contenant le point $w=0$. Faisons la représentation conforme, $w=F(z)$ du domaine $\mathcal{D}$ sur l'anneau $r<|z|<R$, $0=F(z_0)$. En enlevant de l'anneau le segment $[re^{i(\arg z_0+\pi)'}, Re^{i(\arg z_0+\pi)}]$, faisons la représentation conforme, $z=\varphi(z)$, du domaine simplement connexe ainsi obtenu sur le cercle $|z|<1$, $z_0=\varphi(0)$. Posons $\psi_2(z)=F[\varphi(z)]$.

Lemme II. — *Quelle que soit la fonction $w=f(z)$ univalente dans le cercle $|z|<1$, $f(0)=0$, dont toutes les valeurs, pour $|z|<1$, appartiennent à $\mathcal{D}$, on a $|f'_{(0)}|\leqq|\psi'_2(0)|$.*

Les démonstrations de ces deux propositions sont très simples, il suffit de tenir compte du théorème connu de MM. Koebe et Bieberbach.

2. *Conditions caractéristiques.* — Passons au problème posé. Soient $w=\Phi(z)$ la fonction cherchée et $z=\Phi_1(w)$ la fonction inverse. Désignons par $\mathcal{D}$ l'ensemble des valeurs de $f(z)$ pour $|z|<1$ et désignons par F la frontière du domaine $\mathcal{D}$. En appliquant les lemmes I et II il est facile d'établir les propriétés suivantes de $\Phi(z)$:

1° La fonction $w=\Phi(z)$ est univalente dans le cercle $|z|<1$, $\Phi(0)=0$, $\Phi'(0)$ est réel.

2° Chaque point du plan appartient ou bien à $\mathcal{D}$ ou bien à F.

3° La frontière F est formée d'un nombre fini d'arcs simples analytiques. Les points $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont les extrémités de n arcs différents. Chaque autre point de F appartient ou bien à un seul arc (point régulier de F) ou bien est une extrémité commune à trois arcs au moins.

4° En chaque point régulier w_0 de F la fonction $|\Phi'_1(w)|$ [1] possède une valeur limite unique, indépendante du chemin par lequel w tend vers w_0 dans $\mathcal{D}$.

On peut démontrer que la fonction $w=\Phi(z)$ jouissant des propriétés 1°, 2°, 3° et 4° est unique, donc :

Théorème I. — *La fonction cherchée est unique.*

Théorème II. — *Les conditions 1°, 2°, 3° et 4° sont les conditions néces-*

---

[1] Module de la dérivée de la fonction $\Phi_1(w)$.

saires et suffisantes pour que la fonction $w = \Phi(z)$ *soit la fonction cherchée.*

En faisant le prolongement analytique de la fonction $w = \Phi(z)$ et en construisant ainsi les surfaces riemanniennes dans les plans z et w, on obtient facilement les propriétés caractéristiques suivantes de la fonction $\Phi(z)$:

1° $\Phi(0) = 0$;

2° La surface riemannienne dans le plan w possède au plus $2n$ points de ramification, parmi lesquels se trouvent le point ∞ et les n points donnés $a_1, a_2, \ldots, a_n$;

3° La fonction $\Phi_1(w)$ est continue en chaque point de la surface, sauf au point $w = 0$, où elle peut être infinie. La fonction $\Phi'_1(w)$ est finie en chaque point de la surface sauf aux points $w = 0$, $w = a_k (k = 1, 2, 3, \ldots, n)$. Au point a_k, $\Phi'_1(w)$ est infinie comme $\frac{1}{\sqrt{w - a_k}}$;

4° Si z_0 est une valeur de $\Phi_1(w_0)$, chaque autre valeur z_i de $\Phi_1(w_0)$ s'obtient par la formule

$$z_i = z_0^{\pm 1} e^{i\varphi_k},$$

où les nombres $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$, $N \leqq 2n - 1$ sont des nombres définis par la position des points $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et la suite totale $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k, \ldots$ est la suite minimale contenant $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$ et invariante par rapport à la transformation $2\varphi_k - \varphi_m$.

D'après la propriété 4° on voit immédiatement que si les φ_k sont en nombre fini, les surfaces riemanniennes ont un nombre fini de feuillets ; donc, dans ce cas, la fonction $\Phi(z)$ étant algébrique, on peut trouver une expression exacte de cette fonction. Dans le cas général, la fonction $\Phi(z)$ est transcendante, on peut définir cette fonction par des approximations successives.

3. *Application.* — On peut déduire immédiatement du théorème II la proposition suivante :

Soit $w = f(z)$ *une fonction univalente dans le cercle* $|z| < 1$ *et telle que* $f(0) = 0$, $|f'(0)| = 1$. *Alors* $f(z)$ *prend dans ce cercle au moins l'une des valeurs de la forme*

$$\frac{1}{\sqrt[n]{4}} e^{i\left(\varphi_0 + \frac{2k\pi}{n}\right)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$