BULLETIN DE LA S. M. F.

P. BESSONOFF
M. LAVRENTIEFF

Sur l'existence de la dérivée-limite

Bulletin de la S. M. F., tome 58 (1930), p. 175-198
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1930__58__175_0>

SUR L'EXISTENCE DE LA DÉRIVÉE-LIMITE;

PAR MM. P. BESSONOFF ET M. LAVRENTIEFF.

I. Dans cet article nous nous proposons d'établir quelques propositions de la théorie des représentations conformes. Il s'agit des questions concernant la correspondance entre les frontières quand la nature de ces frontières satisfait à quelques conditions restrictives. Nous prenons le cercle comme un des deux domaines pour fixer les idées. Quant à l'autre nous supposons qu'il est limité par une courbe simple de Jordan.

Nous commençons par les notations dont nous aurons à faire usage dans la suite.

Soit $w = f(z)$ une fonction réalisant la représentation conforme du domaine D sur le cercle-unité. Le point $w = 0$, centre de la circonférence, est homologue de z_0, ainsi que $\bar{z}$ et $\bar{w}$ sont deux points homologues des frontières Γ et γ du domaine D et du cercle. Si $z_1 z_2$ et $w_1 w_2$ sont deux arcs correspondants des frontières, nous désignons par Δs et $\Delta\sigma$ deux segments de ces arcs contenant toujours les points fixes et homologues $\bar{z}$ et $\bar{w}$. Nous établissons quelques propositions sur l'allure du rapport $\frac{\Delta s}{\Delta\sigma}$, $\bar{z}$ étant un point fixe. Nous établissons les conditions géométriques dans lesquelles la valeur $\frac{\Delta s}{\Delta\sigma}$ tend vers une limite finie (différant de zéro) et dans lesquelles il existe une « dérivée-limite ».

Il y a des résultats concernant la dérivée-limite publiés par M. V. Weniaminoff [1]. Il s'agit des conditions pour l'existence d'une dérivée-limite sur un ensemble de mesure positive. C'est le point de vue intégral. D'autre part [2] quelques théorèmes ont été énoncés sur l'allure du rapport $\frac{\Delta s}{\Delta\sigma}$ en un point de la frontière. Dans

(1) V. WENIAMINOFF, *Sur la dérivée-limite d'une fonction analytique* (*Comptes rendus*, t. 180, p. 114); *Sur quelques propriétés de la dérivée-limite* (*Comptes rendus*, t. 180, p. 902).

(2) M. LAVRENTIEFF, *Sur la représentation conforme* (*Comptes rendus* du 7 juin 1927, t. 184, p. 1407).

ce qui suit nous étudions toujours les propriétés différentielles de la frontière. Le lemme 1 rend immédiats quelques résultats publiés sans démonstrations ([1]).

Nous commençons par établir une proposition très simple qui nous sera utile dans la suite et que nous appelons « principe de localisation ».

II. *Principe de localisation.* — Soit D un domaine limité par une courbe de Jordan simple et fermée. Faisons la transformation conforme du domaine D sur le cercle-unité. D'après la transformation, un point z_0 du domaine D correspond au centre du cercle $w = 0$ et un point $\bar{z}$ de la frontière Γ correspond à un point $\bar{w}$ de la circonférence $|w| < 1$. Entourons le point $\bar{z}$ d'un cercle de rayons ρ. Ce cercle coupe la frontière en une infinité dénombrable d'arcs. Nous en désignons une qui contient le point $\bar{z}$, par $z_1 z_2$. Soient w_1 et w_2 les points homologues (d'après la transformation) de z_1 et z_2.

Principe. — On déforme la frontière et l'on déplace le point z_0 d'une manière arbitraire à l'extérieur du cercle de rayon ρ entourant le point $\bar{z}$. On fait la représentation conforme du domaine transformé sur le cercle $|w| < 1$. Alors, en conservant les notations du numéro I, on peut affirmer que les propriétés suivantes subsistent après les déformations :

1° L'existence des bornes supérieure et inférieure du rapport $\frac{\Delta s}{\Delta \sigma}$;

2° L'existence de la limite : $\lim \frac{\Delta s}{\Delta \sigma}$;

3° L'existence de la dérivée-limite au point $\bar{z}$;

4° Les propriétés 1° et 2° en chaque point d'un intervalle $z'_1 z'_2$ $[z'_1 z'_2 \subset z_1 z_2]$;

5° La continuité de la dérivée au point z;

6° L'existence et la continuité de la dérivée seconde au point z.

Soient D un domaine limité par la courbe Γ et $w = f(z)$ une fonction réalisant la transformation sur le cercle $|w| < 1$. Supposons que

$$0 < m < \frac{\Delta s}{\Delta \sigma} < M. \tag{α}$$

([1]) M. Lavrentieff, *loc. cit.*

pour un point $\bar{z}$ de la frontière. Faisons la déformation de la frontière qui remplace un arc L de la frontière par un autre l, passant par les mêmes points de la frontière, mais contenu dans le domaine D. Désignons par D′ le domaine transformé. Dans le cercle $|w| < 1$ nous avons un arc λ homologue de l d'après la transformation $w = f(z)$.

Faisons la transformation conforme de la partie du cercle, limitée par l'arc λ et correspondant à D′, sur le cercle $|z'| < 1$ du plan des z'. Soit $z' = \varphi(w)$ la fonction réalisant cette transformation et $o = \varphi(o)$. Alors, la fonction $z' = \varphi[f(z)]$ opère la transformation du domaine D′ sur le cercle-unité. Soit $\Delta\sigma'$ l'arc correspondant à Δs d'après cette transformation.

En vertu du principe de Schwarz il y a une dérivée $\frac{dz'}{dw}$ sur l'arc Δw de la circonférence

$$(\beta) \qquad \left|\frac{dz'}{dw}\right|_{w=\bar{w}} = \Lambda \qquad (o < \Lambda < \infty).$$

Considérons l'égalité

$$\frac{\Delta s}{\Delta\sigma'} = \frac{\Delta s}{\Delta\sigma}\,\frac{\Delta\sigma}{\Delta\sigma'}.$$

D'après (β) :

$$o < m_1 < \frac{\Delta\sigma}{\Delta\sigma'} < M_1.$$

D'après (α) :

$$o < m < \frac{\Delta s}{\Delta\sigma} < M.$$

Il en résulte

$$o < n < \frac{\Delta s}{\Delta\sigma'} < N.$$

On a le même résultat quand on déforme le domaine en y ajoutant une partie du plan au domaine D.

Des raisonnements pareils nous montrent que le rapport $\frac{\Delta s}{\Delta\sigma}$ reste borné après un déplacement du point z_0 (homologue de $w = o$) à l'intérieur du domaine D.

Nous n'insistons plus sur ce point. Toutes les propriétés différentielles mentionnées dans l'énoncé du principe se démontrent par le même procédé, c'est-à-dire en faisant la double représentation conforme et en utilisant le théorème sur la dérivée de la fonction composée.

III. *Quelques propositions préliminaires :*

a. Considérons le demi-plan $Iw > -\eta$. Enlevons de ce demi-plan le rectangle dont les sommets sont : $A(-\xi, -\eta)$, $B(-\xi, 0)$, $C(\xi, 0)$, $D(\xi, -\eta)$ et faisons la représentation conforme du domaine qui reste sur le demi-plan $Iz > 0$, en faisant correspondre $z = i$ à $w = i$.

Soient a, b, c, d les point homologues de A, B, C, D. Supposons que ξ tend vers zéro et que

$$(\gamma) \qquad \lim_{\xi=0} \frac{\eta}{\xi} = 0.$$

Nous allons démontrer que

$$\lim_{\xi=0} \frac{2\xi}{bc} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim \frac{\eta}{cd} = k \qquad (0 < k < \infty).$$

Nous posons $bc = 2\varepsilon$, $cd = ab = \varepsilon . \varphi$ et nous supposons que l'origine est au milieu de ab.

Alors, il suffit de démontrer que

$$\lim_{\xi=0} \frac{\xi}{\varepsilon} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\xi=0} \frac{\eta}{\varepsilon\varphi} = \frac{\pi}{2}.$$

La fonction réalisant la représentation est la suivante :

$$w = C \int_0^{\frac{z}{\varepsilon}} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2 - (1+\varphi)^2}}\, dx.$$

où les nombres C, ε, φ satisfont aux conditions suivantes :

$$(1) \qquad 1 = C \int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2 + (1+\varphi)^2}}\, dx,$$

$$(2) \qquad \xi = C \int_0^{1} \sqrt{\frac{1 - x^2}{(1+\varphi)^2 - x^2}}\, dx,$$

$$(3) \qquad \eta = C \int_1^{1+\varphi} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{(1+\varphi)^2 - x^2}}\, dx.$$

D'après (γ), nous avons

$$\lim_{\xi=0} \frac{\displaystyle\int_1^{1+\varphi} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{(1+\varphi)^2 - x^2}}\, dx}{\displaystyle\int_0^{1} \sqrt{\frac{1 - x^2}{(1+\varphi)^2 - x^2}}\, dx} = 0;$$

donc

$$\lim_{\xi=0} \varphi = 0.$$

D'autre part on a, d'après (1),

$$1 = \frac{C}{\varepsilon} \int_0^1 \sqrt{\frac{x^2+\varepsilon^2}{x^2+\varepsilon^2(1+\varphi)^2}}\,dx.$$

La fonction $\sqrt{\frac{x^2+\varepsilon^2}{x^2+\varepsilon^2(1+\varphi^2)^2}}$ étant bornée dans l'intervalle $(0, 1)$ et tendant vers un, si ε tend vers zéro, on aura

$$\lim_{\zeta=0} \frac{C}{\varepsilon} = 1.$$

La fonction $\sqrt{\frac{1-x^2}{(1+\varphi)^2-x^2}}$ étant bornée dans l'intervalle $(0, 1)$ et tendant vers 1, on a, d'après (2),

$$\lim_{\xi=0} \frac{\xi}{C} = \lim_{\xi=0} \frac{\xi}{\varepsilon} = 1.$$

Évaluons maintenant la valeur η

$$\begin{aligned} \eta &= C\int_1^{1+\varphi} \sqrt{\frac{x^2-1}{(1+\varphi)^2-x^2}}\,dx \\ &= C\int_1^{1+\varphi} \sqrt{\frac{x-1}{1+\varphi-x}}\sqrt{\frac{x+1}{1+\varphi+x}}\,dx \\ C &\cong \int_1^{1+\varphi} \sqrt{\frac{x-1}{(1+\varphi)-x}}\,dx \quad (^1). \end{aligned}$$

Changeons la variable $x - 1 = \varphi y$

$$\eta \cong C\varphi \int_0^1 \sqrt{\frac{y}{1-y}}\,dy = C\varphi\,\frac{\pi}{2}.$$

Il s'ensuit

$$\lim \frac{\eta}{C\varphi} = \lim \frac{\eta}{\varepsilon\varphi} = \frac{\pi}{2}.$$

---

(1) Nous écrivons

$$f(x) \cong \varphi(x),$$

au lieu de

$$\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 1.$$

On fait de la même manière la représentation conforme du demi-plan supérieur limité par le contour polygonal MABCDN

$$M(-\infty, \eta), \quad A(-\xi, \eta), \quad B(-\xi, 0), \quad C(\xi, 0), \quad D(\xi, \eta), \quad M(\infty, \eta).$$

Des raisonnements tout à fait analogues nous donnent les mêmes correspondances entre les segments au voisinage de l'origine.

Nous avons les mêmes égalités

$$\lim \frac{\xi}{\varepsilon} = 1, \qquad \lim \frac{\eta}{\varepsilon\xi} = \frac{\pi}{2}.$$

b. Pour nos recherches nous utilisons comme un instrument une courbe dont nous savons représenter l'intérieur sur un demi-plan par une fonction effectivement connue.

Il s'agit de la fonction

$$w = z + z^{1+\alpha} \qquad (0 < \alpha \leqq 1).$$

On représente le demi-plan $Rz > 0$ au moyen de la branche qui fait correspondre la partie droite de l'axe réel à celle du plan des w.

L'axe imaginaire du plan des z correspond à la courbe en question du plan des w.

Soit $z = \rho . e^{\pm\frac{\pi}{2} i}$

$$u + iv = \pm i\rho\left\{1 + \rho^{\alpha}\left[\cos\frac{\pi}{2}\alpha \pm i\sin\frac{\pi}{2}\alpha\right]\right\}$$

$$u = -\rho^{1+\alpha}\sin\frac{\pi}{2}\alpha.$$

$$v = \pm\rho\left(1 + \rho^{\alpha}\cos\frac{\pi}{2}\alpha\right).$$

Cette courbe, symétrique par rapport à l'axe réel, est régulière partout. Au point $z = 0$, où elle n'est pas analytique, la fonction $w = z + z^{1+\alpha}$ a une dérivée, par conséquent le rapport des arcs correspondant au voisinage de l'origine dans les plans z et w reste borné et tend vers une limite finie égale à $|1 + (1 + \alpha)z^{\alpha}|$. Les nombres v et u étant les coordonnées d'un point de la courbe que nous appelons « courbe auxiliaire C_{α} » on a au voisinage de l'origine

$$\left|\frac{u}{v}\right| = \frac{\rho^{1+\alpha}\sin\frac{\pi}{2}\alpha}{\rho\left(1 + \rho^{\alpha}\cos\frac{\pi}{2}\alpha\right)} \cong k\rho^{\alpha} \qquad (k = \text{const.}).$$

Nous avons évidemment

$$\lim_{\rho=0} \frac{v}{\rho} = 1,$$

et par suite au voisinage de l'origine

$$\left|\frac{u}{v}\right| \cong k\,|v|^{\alpha}.$$

La fonction $w = z + z^{1+\alpha}$ opère la représentation conforme du demi-plan $\mathrm{R}z > 0$ sur le domaine concave limité par la courbe auxiliaire $C_{\alpha e}$.

La fonction inverse de $w = z + z^{1+\alpha}$ fait la représentation conforme du demi-plan $\mathrm{R}w > 0$ sur un domaine convexe D limité par une courbe, semblable à la courbe auxiliaire $C_{\alpha e}$, et que nous appelons « courbe auxiliaire $C_{\alpha i}$ ». En désignant par R et Φ le module et l'argument de w on a

$$\mathrm{R}(\cos\Phi + i\sin\Phi) = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) + \rho^{1+\alpha}[\cos(1+\alpha)\varphi + i\sin(1+\alpha)\varphi],$$
$$\mathrm{R}\cos\Phi = \rho\cos\varphi + \rho^{1+\alpha}\cos(1+\alpha)\varphi.$$
$$\mathrm{R}\sin\Phi = \rho\sin\varphi + \rho^{1+\alpha}\sin(1+\alpha)\varphi.$$

L'axe imaginaire du plan des w correspond à

$$0 = \rho[\cos\varphi + \rho^{\alpha}\cos(1+\alpha)\varphi]$$
$$\pm\mathrm{R} = \rho[\sin\varphi + \rho^{\alpha}\sin(1+\alpha)\varphi].$$

L'équation de la courbe auxiliaire $C_{\alpha i}$ est

$$\rho^{\alpha} = -\frac{\cos\varphi}{\cos(1+\alpha)\varphi}.$$

Il est évident qu'une branche de la courbe se trouve dans le secteur $\left[\varphi = \frac{\pi}{2(1+\alpha)},\ \varphi = \frac{\pi}{2}\right]$ et que la courbe est symétrique par rapport à l'axe réel.

On cherche la valeur $\frac{x}{y}$ au voisinage de l'origine, x et y étant les coordonnées cartésiennes d'un point de la courbe $C_{\alpha i}$

$$\frac{x}{y} = \cot\varphi,$$

On a

$$\lim_{\varphi=\frac{\pi}{2}}\left[\cot\varphi : \frac{\cos\varphi}{\cos(1+\alpha)\varphi}\right] = k_1 \qquad (0 < k_1 < \infty),$$

par suite

$$\left|\frac{x}{y}\right| \cong k_1 |y|^{\alpha}.$$

IV. On suppose dans la suite que le point en question de la frontière du domaine D soit à l'origine $w = 0$ et que l'axe réel soit la tangente. Soit $M(u, v)$ un point de la frontière voisin de l'origine. Nous nous bornerons à considérer le cas où l'allure de la courbe frontière au voisinage de l'origine est soumise aux conditions (¹)

$$(\text{A}) \qquad \begin{cases} \left|\dfrac{v}{u}\right| < |u|^{\alpha} \\ \lim \dfrac{\overset{\frown}{\text{OM}}}{|u|} = 1 \end{cases} \qquad (0 < \alpha \leq 1).$$

Cela posé, on peut démontrer la proposition suivante :

Lemme I. — *Les conditions* (A) *sont suffisantes pour que les rapports*

$$\frac{\Delta s}{\Delta \sigma} \quad \text{et} \quad \frac{\Delta \sigma}{\Delta s}$$

soient bornés (²), Δs étant limité par les droites

$$u = -\frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{et} \qquad u = +\frac{\varepsilon}{2}.$$

(¹) Les deux cas limites sont :

1°
$$\alpha = 1.$$

En désignant par τ un angle de la tangente au point M et par s l'arc OM, on a

$$\frac{v}{u^2} \cong \frac{\tau}{s} < 1.$$

S'il existe une limite finie de la valeur $\frac{\tau}{s}$, on a le cas où la courbure au point fixe est finie.

2°
$$\alpha = 0; \qquad \frac{v}{u^2} < \frac{1}{u}.$$

Le point $z = 0$ peut être un sommet de la frontière.

(²) Nous ne considérons que le cas où la frontière est rectifiable au voisinage du point O. Or, en désignant pour un moment la corde OM par Δs la proposition est vraie sans la restriction

$$\lim \frac{\overset{\frown}{\text{OM}}}{|u|} = 1.$$

On place la courbe auxiliaire $C_{\alpha i}$ dans le demi-plan supérieur de telle manière qu'elle ait pour tangente au « sommet » l'axe réel. De la même manière on place la courbe auxiliaire $C_{\alpha e}$ dans le demi-plan inférieur.

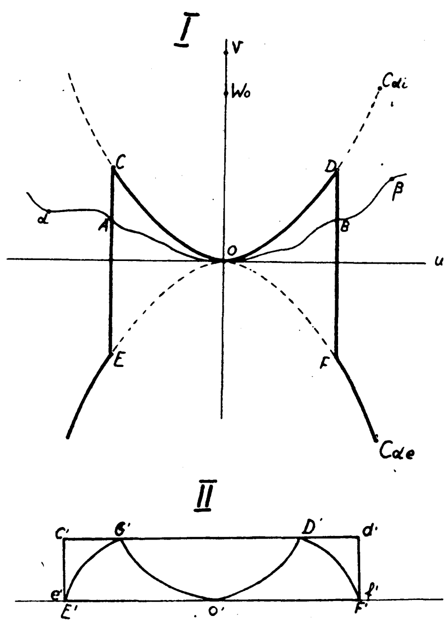
D'après les conditions (A) un arc de la frontière $\alpha\beta$ sera, au voisinage de l'origine, entièrement contenu entre deux courbes auxiliaires.

En vertu du principe de localisation on peut supposer dans la suite que la frontière Γ est située entièrement entre les courbes $C_{\alpha i}$ et $C_{\alpha e}$.

1° Ces remarques faites, on effectue les opérations suivantes :

α. On trace deux droites symétriques parallèles à l'axe imaginaire à la distance $\frac{\varepsilon}{2}$ de l'origine. Soient CD et EF les arcs des $C_{\alpha i}$

Fig. 1.



et $C_{\alpha e}$ dans la bande $-\frac{\varepsilon}{2} < u < +\frac{\varepsilon}{2}$ et AB l'arc de la frontière, contenu dans cette bande qui contient l'origine. On choisit ε assez petit pour que AB soit contenu dans $\alpha\beta$ (*fig.* 1, I). On remplace, alors, le domaine D par un autre D'. La frontière Γ' de D' est formée par les segments EC, FD, l'arc CD et les parties de $C_{\alpha\rho}$ extérieures à la bande $-\frac{\varepsilon}{2} < u < +\frac{\varepsilon}{2}$.

β. On opère la représentation conforme de l'extérieur de la courbe $C_{\alpha\rho}$ sur le demi-plan $Iz' > 0$. Soit $z' = \varphi(w)$ une fonction réalisant la représentation et $i = \varphi(w_0)$. On désigne par E'C'O'D'F' l'arc homologue de ECODF.

γ. Envisageons maintenant un rectangle $e'c'd'f'$ le plus petit possible ayant les côtés parallèles aux axes et contenant la figure E'C'O'D'F'. Soit D'' le domaine qui est formé en enlevant ce rectangle du demi-plan supérieur On fait la représentation conforme du domaine D'' sur le demi-plan $Iz'' > 0$ au moyen d'une fonction $z'' = F'(z')$. Soit $i = F(i)$. On désigne par e'', c'', d'', f'' les points holomogues de e', c', d', f', d'après la transformation.

δ. On fait, enfin, l'application du demi-plan $Jz'' > 0$ sur le cercle $|z| < 1$ en faisant correspondre les points $z'' = i$ et $z = 0$.

Soit $\Delta\sigma$ l'arc de la circonférence $|z| = 1$ correspondant à $\Delta s =$ AB d'après la transformation conforme du domaine D sur le cercle $|z| < 1$. Nous considérons les déformations de l'arc $\Delta\sigma$ de la circonférence $|z| = 1$ correspondant aux variations de Δs dans le procédé décrit.

L'opération (α) étant faite, on remplace l'arc AB $= \Delta s$ par un autre ECODB, auquel correspond un arc $\Delta\sigma'$ de la circonférence $|z| = 1$.

D'après un principe de M. Montel ([1]) l'arc homologue de ACODB et, *a fortiori*, l'arc $\Delta\sigma'$, homologue de ECODF, est plus grand que $\Delta\sigma$

$$\Delta\sigma' > \Delta\sigma.$$

Or, en vertu des conditions (A), on peut affirmer

$$\lim_{AB = \Delta s \to 0} \frac{AB}{ECODF} = 1.$$

([1]) P. Montel, *Journ. de Math.*, 7e série, t. 3, 1917, p. 31-32. — Lavrentieff, *Comptes rendus*, 7 juin 1927. — Polya und Szegö, *Aufgaben und Lehrsätze*, II, 5, 131.

L'opération (β) fait correspondre ECODF et E'C'O'D'F'. Si ε tend vers zéro, la limite

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\mathrm{ECODF}}{\mathrm{E'C'O'D'F'}} = c \qquad (0 < c < \infty)$$

existe d'après la nature de la fonction réalisant la représentation.

Le remplacement de E'C'O'D'F' par $e'c'o'd'f'$ (l'opération γ) correspond à un changement de l'arc homologue de la circonférence $|z| = 1$.

Soit $\Delta\sigma''$ l'arc homologue de $e'c'd'f'$ par rapport à la représentation du domaine D'' sur le cercle $|z| < 1$.

D'après le principe de M. Montel

$$\Delta\sigma'' > \Delta\sigma' > \Delta\sigma.$$

La transformation (δ) conserve l'ordre de grandeur des arcs au voisinage de l'origine. Il est facile de voir que

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\mathrm{E'C'O'D'F'}}{e'c'o'd'f'} = 1.$$

Il résulte de la proposition a, III :

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{e'c'o'd'f'}{e''c''o''d''f''} = 1.$$

La transformation (s) nous amène effectivement à $\Delta\sigma''$. La fonction

$$z = i\,\frac{z''-i}{z''+i}$$

nous donne par exemple

$$\lim_{\Delta s=0} \frac{e''c''o''d''f''}{\Delta\sigma''} = \frac{1}{2},$$

Alors, nous avons

$$\lim_{\Delta s=0} \frac{\Delta s}{\Delta\sigma''} = \frac{c}{2};$$

par suite

$$\frac{c_1}{2} < \frac{\Delta s}{\Delta\sigma} \qquad (c_1 \leqq c).$$

Nous avons trouvé une borne (inférieure) pour le rapport $\frac{\Delta s}{\Delta\sigma}$. Quant à l'autre (supérieure), on peut faire une autre série de déformations du domaine D de sorte que l'arc de la circonférence

$z| = 1$ homologue d'un arc Δs ne croisse pas pendant les déformations du domaine.

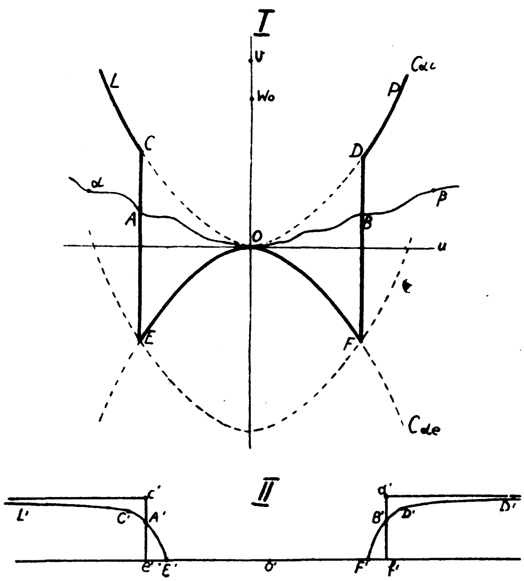
2° A cet effet on fait les opérations suivantes :

α. On remplace le domaine D par D′, dont la frontière est formée par les segments EC, FD, l'arc EF et les parties de $C_{\alpha i}$ extérieures à la bande

$$-\frac{\varepsilon}{2} < u < \frac{\varepsilon}{2}.$$

β. On déplace la courbe $C_{\alpha i}$ le long de l'axe imaginaire jusqu'à ce que les points E et F soient sur cette courbe (C et D sont symétriques par rapport à l'axe imaginaire). Ensuite on fait la représentation conforme de l'intérieur de la courbe déplacée sur le

Fig. 2.



demi-plan $Iz' > 0$. Soient $z' = \varphi_1(w)$ une fonction réalisant la représentation et $i = \varphi_1(i)$. On désigne A′E′O′F′B′ l'arc homologue de AEOFB. La distance de chaque point des courbes E′C′L′ et F′B′P′ de l'axe réel est de même ordre de grandeur que la distance DF, d'après la nature de la fonction $z' = \varphi_1(w)$ (voir b_1. III).

γ. On trace deux droites parallèles à l'axe imaginaire par A' et B'. Elles rencontrent l'axe réel dans les points e' et f'.

On peut tracer une droite parallèle à l'axe réel dont la distance à l'origine soit infiniment petite par rapport à $E'F'$ et qui ne coupe les courbes $E'C'L'$ et $F'B'P'$ qu'aux points aussi éloignés que l'on veut de l'origine. Soient c' et d' les points d'intersection de cette droite avec les droites $e'A'$ et $f'B'$. On désigne par D'' le domaine simple limité par les segments $e'c'$, $f'd'$, $e'f'$ et deux demi-droites parallèles à l'axe réel issues des points c' et d'.

On fait maintenant la représentation du domaine D'' sur le demi-plan $Iz'' > 0$ au moyen d'une fonction $z'' = F_1(z')$. Soient $i = F_1(i)$ et e'', c'', d'', f'' les points homologues des e', c', d', f' dans cette transformation.

On fait, enfin, l'application du demi-plan $Iz'' > 0$ sur le cercle $|z| < 1$, en faisant correspondre les points $z'' = i$ et $z = 0$.

En faisant des raisonnements analogues à ceux du 1° nous aurons une borne supérieure du rapport $\frac{\Delta s}{\Delta \sigma}$

$$\frac{\Delta s}{\Delta \sigma} < \frac{C_1}{2}.$$

Remarque. — On déduit facilement de la démonstration du lemme 1 qu'en dehors de l'arc Δs la frontière peut être déformée arbitrairement entre deux courbes $C_{\alpha e}$ et $C_{\alpha i}$: les constantes c_1 et C_1 ne dépendent que de la forme de la frontière au voisinage de l'origine.

V. Nous avons démontré que les conditions (A)

$$\left|\frac{v}{u}\right| < |u|^{\alpha},$$

$$\lim \frac{\overset{\frown}{OM}}{|u|} = 1$$

sont suffisantes pour que les rapports $\frac{\Delta s}{\Delta \sigma}$ et $\frac{\Delta \sigma}{\Delta s}$ soient bornés.

Les conditions (A) seront remplies, si l'on suppose qu'il existe une tangente au voisinage de l'origine et que la vitesse moyenne de sa variation $\frac{\tau}{s}$ satisfait à l'inégalité

$$\frac{\tau}{s} < \frac{1}{s^{1-\alpha}}.$$

Cette restriction est essentielle, car on peut construire une courbe par un procédé géométrique dont la tangente en un point varie d'une manière continue et tandis que le rapport $\frac{\Delta s}{\Delta \sigma}$ n'est pas borné.

Soient

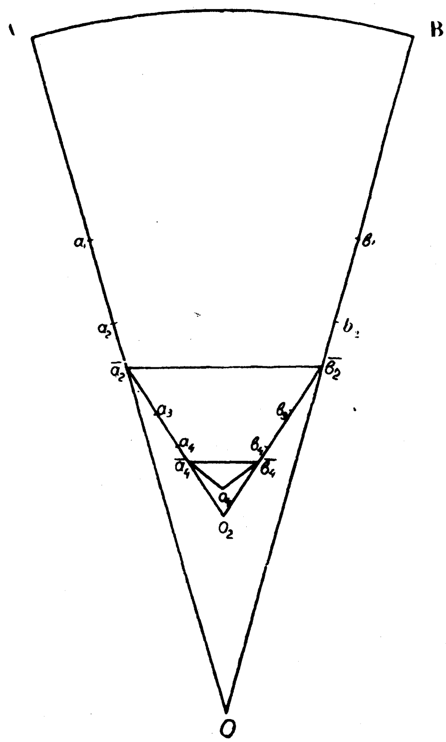
$$0 < M_1 < M_2 < \ldots < M_n < \ldots \lim_{n \to \infty} M_n = \infty,$$

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \ldots \lim_{n \to \infty} \alpha_n = \frac{\pi}{2},$$

deux suites de nombres positifs.

Considérons un secteur de cercle dont l'angle AOB est égal

Fig. 3.



à $2\alpha_1$. On opère la transformation conforme de l'intérieur du secteur (le domaine D) sur le cercle $|w| < 1$, en faisant correspondre un point z_0 à $w = 0$. Soient oa_1 et ob_1 deux segments des rayons OA et OB. On peut les choisir assez petits pour que

$$\frac{a_1 o + o b_1}{\overset{\frown}{a'_1 b'_1}} > M_1.$$

$a'_1 b'_1$ étant un arc de la circonférence homologue de $a_1 o b_1$ d'après la représentation.

Il existe deux points a_2 et b_2 assez proches de o, pour que l'inégalité

$$\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\overset{\frown}{a'_1 b'_1}} > M_1$$

subsiste.

Soient

$$\overline{oa_2} < oa_2 \quad \text{et} \quad \overline{ob_2} = \overline{oa_2}.$$

Faisons la représentation conforme du domaine D_1 limité par l'arc AB et la ligne polygonale $Bb_2\overline{a}_2A$ sur le cercle $|w| < 1$.

En désignant par a''_1, a''_2, b''_1, b''_2 les points homologues des a_1, a_2, b_1, b_2 on affirme, en vertu du principe de M. Montel, que

$$a'_1 a'_2 > a''_1 a''_2 \qquad \text{et} \qquad b'_1 b'_2 > b''_1 b''_2.$$

En diminuant $\overline{oa}_2$ et $o\overline{b}_2$ nous pouvons réaliser l'inégalité

$$\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\overset{\frown}{a''_1 b''_1}} > M_1.$$

Soient alors $\overline{a_2 o_2}$ et $\overline{b_2 o_2}$ deux segments symétriques, à l'extérieur du domaine D_1, formant un angle égal à $2\alpha_2$.

En faisant la représentation du domaine D'_1, qui est limité par la frontière $ABb_2 o_2 \overline{a}_2 A$, sur le cercle $|w| < 1$, nous avons :

a. Le principe de M. Montel entraîne

$$\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a'''_1 b'''_1} > M_1.$$

$a'''_1 b'''_1$, étant l'arc de la circonférence homologue de $a_1 \overline{a}_2 o_2 \overline{b}_2 b_1$, par rapport à la nouvelle représentation.

b. On a deux segments $o_2 a_3$ et $o_2 b_3$ tels que

$$\frac{a_3 o_2 + o_2 b_3}{a'''_3 b'''_3} > M_2.$$

Nous pouvons répéter pour l'angle $a_3 o_2 b_3$ les raisonnements que nous avons faits pour l'angle $a_1 o b_1$ et continuer ce procédé indéfiniment.

Faisons la représentation conforme du domaine D_n que nous donne ce procédé. Désignons les points homologues de a_n, b_n par α_n, β_n.

Nous avons alors

$$\frac{\overbrace{a_{2n-1}a_{2n} + b_{2n-1}b_{2n}}}{\alpha_{2n-1}\beta_{2n-1}} > M_n$$

et *à fortiori*

$$\frac{a_{2n-1}b_{2n-1}}{\alpha_{2n-1}\beta_{2n-1}} > M_n.$$

On obtient l'exemple cherché en remplaçant les angles de la ligne polygonale par des arcs des cercles assez petits et tangents aux côtés des angles.

Remarque. — La fonction

$$z = w(1 - \log w)$$

transforme une partie du demi-plan $Rw > 0$ au voisinage de l'origine en un domaine du plan des z limité par une courbe semblable à celle de l'exemple précédent et dont la tangente varie d'une manière continue.

On trouve facilement que

$$\lim \frac{\Delta s}{\Delta \sigma} = \infty$$

au voisinage de l'origine et que

$$\frac{\sigma}{s} < \frac{k}{s \log s},$$

k étant une constante.

VI. Lemme 2. — *Les conditions* (A) *sont suffisantes pour que le rapport* $\frac{\Delta s}{\Delta \sigma}$ *ait une limite*

$$\lim_{\Delta s = 0} \frac{\Delta s}{\Delta \sigma} = L.$$

Δs étant limité par les droites

$$u = -\frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{et} \qquad u = +\frac{\varepsilon}{2}.$$

Soient

$$\lim \sup. \frac{\Delta s}{\Delta \sigma} = M,$$

$$\lim \inf. \frac{\Delta s}{\Delta \sigma} = m.$$

Il faut démontrer que

$$M - m = k = o.$$

On remplace le domaine D, par un autre, D′, qui est formé de la manière suivante : on trace deux droites parallèles à l'axe imaginaire à la distance $\frac{\varepsilon}{2}$ de l'origine. Soit AB l'arc de la frontière, découpé par ces droites et qui contient l'origine. On désigne les points de l'intersection de ces droites avec la courbe $C_{\alpha e}$ par E et F. Alors, le domaine D′ contenant D est limité par l'arc AB, deux segments EA et FB et la partie de la courbe $C_{\alpha e}$ qui est située en dehors de la bande

$$-\frac{\varepsilon}{2} < u < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $\Delta s = ab$ un arc contenant le point o et contenu dans AB. On désigne par $\Delta\sigma'$ l'arc homologue de Δs d'après la représentation conforme du domaine D′ sur le cercle $|z| < 1$. [On suppose que $\Delta\sigma$ soit l'arc homologue de Δs d'après la représentation de D sur le même cercle.]

Nous allons démontrer maintenant que

$$\lim \sup. \frac{\Delta s}{\Delta \sigma'} - \lim \inf. \frac{\Delta s}{\Delta \sigma'} \geqq nk,$$

n étant une constante qui ne dépend pas de ε.

On fait la représentation conforme du domaine D′ sur le cercle $|z'| < 1$. Soit l' une courbe correspondant à la frontière Γ extérieure à l'arc AB. On désigne par

$$w = f(z')$$

une fonction réalisant la représentation. Soit, d'ailleurs,

$$z' = \varphi(z)$$

une fonction réalisant la représentation de la partie du cercle $|z'| < 1$ limitée par l' et A′B′ (homologue de AB) sur le cercle $|z| < 1$.

On a

$$\frac{\Delta s}{\Delta\sigma'} = \frac{\Delta s}{\Delta\sigma}\frac{\Delta\sigma}{\Delta\sigma'},$$

$$\text{lim sup.}\,\frac{\Delta s}{\Delta\sigma'} = \text{lim sup.}\,\frac{\Delta s}{\Delta\sigma}\,\lim\frac{\Delta\sigma}{\Delta\sigma'},$$

$$\text{lim inf.}\,\frac{\Delta s}{\Delta\sigma'} = \text{lim inf.}\,\frac{\Delta s}{\Delta\sigma}\,\lim\frac{\Delta\sigma}{\Delta\sigma'}.$$

En vertu du lemme 1 les nombres $\frac{\Delta s}{\Delta\sigma}$ et $\frac{\Delta s}{\Delta\sigma'}$ sont bornés, par suite

$$0 < n < \frac{\Delta\sigma}{\Delta\sigma'} < N < \infty.$$

D'après la remarque de ce lemme la constante n ne dépend pas de ε.

Alors

$$\text{lim sup.}\,\frac{\Delta s}{\Delta\sigma'} - \text{lim inf.}\,\frac{\Delta s}{\Delta\sigma'} = \lim\frac{\Delta\sigma}{\Delta\sigma'}\left[\text{lim sup.}\,\frac{\Delta s}{\Delta\sigma} - \text{lim inf.}\,\frac{\Delta s}{\Delta\sigma}\right]$$
$$= \lim\frac{\Delta\sigma}{\Delta\sigma'}(M - m) \geqq nk.$$

Il nous reste à démontrer maintenant que

$$\text{lim sup.}\,\frac{\Delta s}{\Delta\sigma'} - \text{lim inf.}\,\frac{\Delta s}{\Delta\sigma'} = 0.$$

Posons

$$\Delta s = ab.$$

a et b étant à la distance $\frac{\varepsilon^2}{2}$ de l'axe imaginaire.

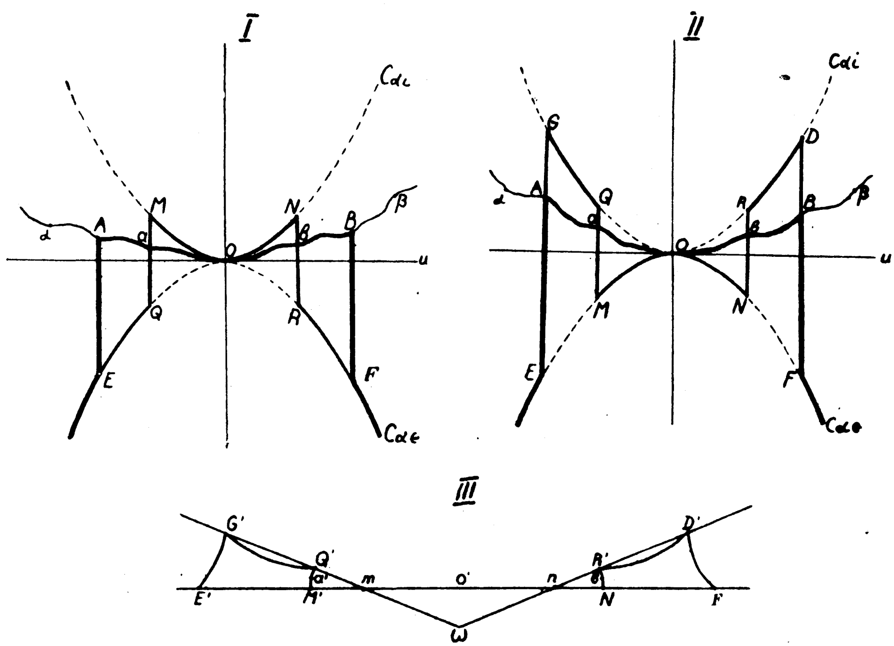
Soit $\Delta\sigma'$ un arc de la circonférence $|z| = 1$ homologue de Δs. Passons du domaine D' à un autre D'_1 par l'opération (α) du 1° (lemme 1) en partant de l'arc ab au lieu de AB. Il suffit de répéter ces opérations et les raisonnements de (β), (γ), (δ) (1^{re} partie) de la démonstration du lemme 1 pour avoir une borne

$$\frac{c}{2} \leqq \text{lim inf.}\,\frac{\Delta s}{\Delta\sigma'} \qquad (\text{voir } \textit{fig. } 4, \text{ I}).$$

Pour avoir une autre borne nous avons besoin de quelques constructions supplémentaires.

α. On mène deux droites parallèles à l'axe imaginaire par les points a et b. Soient M, N et Q, R les points de l'intersection de ces droites avec les courbes $C_{\alpha e}$ et $C_{\alpha i}$. Soient d'ailleurs C et D les points d'intersection des droites EA et FB avec $C_{\alpha i}$. On désigne par D″ le domaine qu'on obtient en enlevant les deux quadrilatères curvilignes ECQM et NRDF du domaine extérieur à $C_{\alpha e}$, et par $\Delta\sigma''$

Fig. 4.



l'arc homologue de aMNb d'après la représentation de D″ sur le cercle $|z| < 1$ (*fig.* 4, II).

En vertu du principe de M. Montel

$$\Delta\sigma'' < \Delta\sigma'.$$

β. On fait la représentation conforme de l'extérieur de la courbe $C_{\alpha e}$ sur le demi-plan $Iz' > 0$ en faisant correspondre $w = w_0$ et $z' = i$.

D'après la représentation, on a deux quadrilatères curvilignes $E'C'Q'M'$ et $N'R'D'F'$ homologues de ECQM et NRDF (*fig.* 4, III).

γ. On mène deux droites par les points $C'Q'$ et $R'D'$ (*fig.* 4, III) formant un angle $C'\omega D'$. On peut démontrer que les arcs $C'Q'$ et $R'D'$ seront en dehors de l'angle $C'\omega D'$. On fait l'application de l'intérieur de cet angle sur le demi-plan $\mathrm{I}z'' > 0$ en faisant correspondre $z' = i$ et $z'' = i$.

δ. On fait la représentation conforme du demi-plan $\mathrm{I}z'' > 0$ sur le cercle $|z| < 1$, au moyen de la fonction du δ (lemme 1).

Après l'opération α. on remplace l'arc $ab = \Delta s$ par $a\mathrm{MN}b$, auquel correspond un arc $\Delta\sigma''$ de la circonférence $|z| = 1$.

On a

$$\lim_{\Delta s = 0} \frac{ab}{a\mathrm{MN}b} = 1,$$

d'après les conditions (A).

D'après la nature de la fonction faisant la représentation conforme β. on a

$$\lim \frac{a\mathrm{MN}b}{a'\mathrm{M'N'}b'} = c \qquad (\textit{voir} \text{ aussi } \beta. \text{ lemme } 1).$$

On prend dans la suite $m\omega n$ au lieu de $a'\mathrm{M'N'}b'$, m et n étant des points de l'intersection des droites CQ et RD avec l'axe réel.

On a

$$\lim_{\Delta s = 0} \frac{a'\mathrm{M'N'}b'}{m\omega n} = 1.$$

En effet, la transformation β conserve l'ordre de grandeur des dimensions des quadrilatères $E'C'Q'M'$ et $N'R'D'F'$.

Par suite

$$\lim_{\varepsilon = 0} \frac{\operatorname{tang} D'nF'}{\varepsilon^{\alpha}} = \lim_{\varepsilon = 0} \frac{D'nF'}{\varepsilon^{\alpha}} = 1.$$

Désignons $\Delta\sigma'''$ un arc de la circonférence $|z| = 1$ homologue de $m\omega n$. D'après le principe de M. Montel

$$\Delta\sigma''' < \Delta\sigma'' < \Delta\sigma'.$$

Soient, enfin, $m'\omega'$ et $\omega'n'$ les segments homologues de $m\omega$ et $n\omega$ d'après la transformation γ. On démontre que

$$\lim_{\varepsilon = 0} \frac{m\omega n}{m'\omega' n'} = 1 \quad (^1).$$

(1) Une fonction réalisant la représentation de l'angle $m\omega n$ sur le demi-plan

On aura maintenant

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\Delta s}{a\mathrm{MN}b} \, \frac{a\mathrm{MN}b}{a'\mathrm{M'N'}b'} \, \frac{a'\mathrm{M'N'}b'}{m\omega n} \, \frac{m\omega n}{m'\omega' n'} \, \frac{m'\omega' n'}{\Delta\sigma''} = \frac{c}{2},$$

par suite

$$\lim \sup. \frac{\Delta s}{\Delta\sigma'} \leqq \frac{c}{2},$$

alors

$$\lim \frac{\Delta s}{\Delta\sigma'} = \frac{c}{2}$$

et le lemme 2 est démontré.

VII. Théorème. — *Si les conditions* (A) *sont remplies en un point la dérivée-limite* (¹) *existe en ce point, et son module*

$\mathrm{J}z > 0$ est la suivante :

$$z = \mathrm{C}.e^{\pi i \varepsilon^\alpha} (z' + i z^{2+\alpha})^{\frac{1}{1-2\varepsilon^\alpha}}.$$

En faisant correspondre $z = 1$ et $z' = i$, on a

$$\mathrm{C} = \frac{e^{-2\pi\varepsilon^\alpha \frac{1-\varepsilon^\alpha}{1-2\varepsilon^\alpha} i}}{(1+\varepsilon^{2+\alpha})^{\frac{1}{1-2\varepsilon^\alpha}}}.$$

Pour le point $z'_1 = -i\varepsilon^{2+\alpha}$ (le point ω), on a

$$z_\omega = 0,$$

Pour le point $z'_2 = \varepsilon^2$ (le point n), on a

$$z_n = \frac{e^{-\frac{\pi\varepsilon^\alpha}{1-2\varepsilon^\alpha} i}}{(1+\varepsilon^{2+\alpha})^{\frac{1}{1-2\varepsilon^\alpha}}} (1 + i\varepsilon^\alpha)^{\frac{1}{1-2\varepsilon^\alpha}} \varepsilon^{\frac{2}{1-2\varepsilon^\alpha}},$$

$$\omega' n' = |z_n| \cong \varepsilon^{\frac{2}{1-2\varepsilon^\alpha}},$$

$$\lim \frac{\omega' n'}{\omega n} = \lim \frac{|z_n|}{\varepsilon^2} = 1.$$

(¹) D'après une définition de M. Weniaminoff on dit que la fonction $f(z)$ a une dérivée-limite $\varphi(z_0)$ en un point z_0, $|z| = 1$ s'il existe une limite

$$\varphi(z_0) = \lim f'(z),$$

lorsque z tend vers z_0 le long d'un chemin quelconque situé à l'intérieur du cercle $|z| \leqq 1$ et non tangent à la circonférence.

Une autre définition de M. Weniaminoff : la fonction $f(z)$ a une dérivée-limite $\varphi(z_0)$ au point z_0, si le rapport

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

tend vers une limite $\varphi(z_0)$ quand $z_0 + \Delta z$ tend vers z_0 tout en restant sur L_1 ou sur L_2 (L_1 et L_2 sont deux courbes situées à l'intérieur du cercle $|z| < 1$ formant un angle non nul au point z_0).

est égal à la limite du rapport des arcs correspondants :

$$\frac{\Delta s}{\Delta \sigma} \quad (^1).$$

Il est possible de faire une application du cercle de rayon 1, tangent à l'axe réel à l'origine, sur un demi-plan de sorte que la limite du rapport des arcs correspondants dans le voisinage de l'origine soit égal à un.

Alors, nous considérons une représentation conforme du domaine D, limité par une courbe simple (et fermée) Γ sur un demi-plan $\mathrm{I}w > 0$.

En faisant correspondre un point du plan des z au point $w = i$, on peut faire la limite $\lim \frac{\Delta s}{\Delta \sigma}$ égale à 1 $\Big[\Delta s$, comme ci-dessus, un arc de Γ, contenant l'origine et contenu dans la bande $-\frac{\varepsilon}{2} < \mathrm{R}z < \frac{\varepsilon}{2}$; $\Delta\sigma$ son homologue d'après la représentation$\Big]$.

Soit

$$w = f(z)$$

une fonction réalisant la représentation conforme du domaine D sur le demi-plan $\mathrm{I}w > 0$.

On change l'échelle dans les deux plans en multipliant l'une et l'autre variable par $\frac{1}{\varepsilon}$ $[\varepsilon > 0]$. Alors on a un domaine D_ε représenté sur le demi-plan $\mathrm{J}w > 0$.

La fonction

$$w = \frac{1}{\varepsilon} f(\varepsilon z)$$

réalise la représentation. Le nombre ε tendant vers zéro, le domaine s'étend et remplit tout le demi-plan supérieur.

Prenons la fonction inverse

$$z = \varphi_\varepsilon(w)$$

et considérons une famille de fonctions

$$\{\varphi_\varepsilon(w)\} \qquad (\varepsilon \to 0).$$

Cette famille est normale dans le demi-plan $\mathrm{I}w > 0$, parce que

---

(1) Δs est un arc arbitraire contenant l'origine.

les fonctions de cette famille admettent une région exceptionnelle $Iz < 0$.

De toute suite de fonctions de la famille on peut extraire une suite partielle convergeant uniformément. Le nombre ε tendant vers zéro, le domaine D_ε remplit tout le demi-plan $Iz > 0$, donc la fonction limite ne peut être qu'une fonction transformant un demi-plan en un autre.

Nous allons démontrer que cette fonction est

$$z = w.$$

Soit, en effet, Δs un arc de Γ contenant l'origine et situé dans la bande

$$-\varepsilon h < Rz < \varepsilon h \qquad (0 < h < 1).$$

Passons au domaine D_ε, nous avons un arc correspondant à Δs, situé dans une bande

$$-h < Rz < h$$

indépendamment de la valeur de ε.

Nous avons supposé que

$$\lim_{\Delta s = 0} \frac{\Delta s}{\Delta \sigma} = 1.$$

Donc, nous voyons, en passant à la limite, que le segment $(-h, +h)$ de l'axe réel $Iz = 0$ correspond à un segment de longueur $2h$ de l'axe réel $Iw = 0$, c'est-à-dire que la fonction limite est

$$z = w,$$

le nombre h étant arbitraire.

Ce résultat nous permet de faire les conclusions suivantes :

1. En désignant par Δs *un arc arbitraire* contenant l'origine $z = 0$, on a

$$\lim \frac{\Delta s}{\Delta \sigma} = 1.$$

2. Les angles se conservent dans le point $z = 0$. Soit, en effet, OM un segment de la longueur ε issu du point $z = 0$. On a un arc om, homologue du segment OM dans le plan des w de longueur η. Dans le domaine D_ε un arc OM_ε correspond à OM, ainsi que om_ε correspond à om d'après le changement de la variable. Il est facile de voir que le changement de l'échelle ne change pas les angles des arcs OM et om avec les axes. Le passage à la limite nous

ramène à la transformation identique où les angles en question sont égaux [1].

3. Il existe une dérivée-limite dans le point $z = 0$, suivant les définitions de M. Weniaminoff. En effet, si ε tend vers zéro, le point M tend vers $z = 0$ le long du segment MO. La dérivée $\frac{dw}{dz}$ au point M est la même que la dérivée au point M_ε du domaine D_ε. Le point M tendant vers $z = 0$ le long du segment MO contenu dans le domaine D, on a la dérivée-limite :

$$\lim \frac{dw}{dz} = 1.$$

D'autre part, il est évident que

$$\lim_{\varepsilon = 0} \frac{\eta}{\varepsilon} = 1.$$

Les angles se conservent dans le point $z = 0$. Cela suffit pour l'existence de la dérivée-limite, si l'on fait usage de l'autre définition [2].

Remarque. — Supposons qu'il existe une tangente en un point $\bar{z}$ de la frontière. Soient Δs et $\Delta\sigma$ les arcs correspondants de la frontière et de la circonférence d'après la représentation conforme et

$$0 < m < \frac{\Delta s}{\Delta\sigma} < M.$$

Soient d'ailleurs $\overline{zz_0}$ un arc, situé à l'intérieur du domaine D, non tangent à la frontière, et $\overline{ww_0}$ l'arc homologue.

On peut démontrer de la même manière que

$$0 < n < \frac{\overline{zz_0}}{\overline{ww_0}} < N,$$

dès que le point z_0 tend vers $\bar{z}$ le long de l'arc $z_0 z$.

---

(1) On connait deux résultats sur la conservation des angles en un point de la frontière :

1° Les angles se conservent en un point de la frontière z_0, s'il existe en ce point une dérivée finie et non nulle le long de la frontière.

M. Privaloff, *Intégrale de Cauchy* (*Thèse russe*, 1919, p. 36).

2° Les angles se conservent en un point de la frontière z_0, où il existe une tangente (G. Julia, *Cours professé à la Sorbonne*, 1926-27).

(2) On voit de la démonstration du théorème qu'il existe une dérivée le long de la frontière au point $z = 0$.