d'où l'on déduit, grâce à (3), les identités

$$\sum_{s=0}^{n} \frac{(-1)^s r}{r+2s}\binom{r+2s}{s}\binom{r'+s}{n-s} = \binom{r'-r}{n},$$

$$\left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}\right)^r = F\left(\frac{r}{4}, \frac{r}{4}+\frac{1}{2}, \frac{r}{2}+1; x^2\right).$$

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur la représentation conforme.* Note (¹) de M. **M. Lavrentieff**, transmise par M. Hadamard.

Le but de cette Note est de considérer quelques questions liées à la correspondance des frontières dans une représentation conforme. Pour les démonstrations, nous nous servons du principe simple suivant.

Soient D et D' deux domaines limités par deux courbes simples fermées de Jordan Γ et Γ'; supposons que: 1° D' est contenu dans D et 2° Γ et Γ' ont un arc commun $\overset{\frown}{a_1 b_1}$. Faisons les transformations conformes des domaines D et D' sur le cercle $|w| < 1$, telles qu'au point $w = 0$ corresponde le même point dans D et D'. Soient $\overset{\frown}{\alpha\beta}$ et $\overset{\frown}{\alpha'\beta'}$ les arcs de la circonférence $|w| = 1$ qui correspondent, d'après ces transformations, à l'arc $\overset{\frown}{ab}$ qui est contenu dans $\overset{\frown}{a_1 b_1}$. Alors, dans ces conditions, la longueur de l'arc $\overset{\frown}{\alpha'\beta'}$ est inférieure ou égale à la longueur de l'arc $\overset{\frown}{\alpha\beta}$. L'égalité peut se présenter dans le seul cas où D est identique à D' (²).

Voici des applications de ce principe :

1. Théorème I. — *Soient* D *et* D' *deux domaines limités par deux courbes,* Γ *et* Γ'*, simples, fermées et de courbures bornées. Dans ces conditions si nous faisons la représentation conforme de* D *sur* D'*, le rapport des arcs correspondants de* Γ *et* Γ' *est borné* (³).

Par des raisonnements tout semblables on peut démontrer cette autre proposition :

(¹) Séance du 7 juin 1927.

(²) Ce principe se trouve implicitement dans un Mémoire de M. P. Montel, *Sur la représentation conforme* (*Journ. de Math.*, 7ᵉ série, 3, 1917, p. 31-32).

(³) Cette proposition est une généralisation d'un théorème de M. Lichtenstein (*Zur konformen Abbildung einfach zusammenhängender schlichter Gebiete* (*Arch. d. Math. u. Phys.*, 25, 1917, p. 179-180), d'après lequel, dans les hypothèses que Γ a une courbure continue et que Γ' est une circonférence, on peut affirmer que le rap-

THÉORÈME II. — *Soient* D *et* D′ *deux domaines limités par des courbes*, Γ et Γ′, *simples, fermées et ayant des tangentes qui varient d'une manière continue. Alors, si nous faisons la représentation conforme de* D *sur* D′ *et désignons par* δ *et* δ' *les longueurs des arcs correspondants de* Γ *et* Γ′, *nous aurons*

$$K_1 \delta^{1-\varepsilon} > \delta' > K_2 \delta^{1+\varepsilon},$$

où ε *est un nombre positif fixe quelconque*, K_1 *et* K_2 *sont des constantes qui dépendent de* ε.

De plus, on peut construire deux domaines qui vérifient les conditions du théorème II et tels que la limite inférieure et la limite supérieure du rapport $\frac{\delta'}{\delta}$ seront respectivement o et ∞.

2. Posons les définitions suivantes :

DÉFINITION I. — Soit D un domaine simplement connexe quelconque. Nous appelons *distance relative* entre deux points z_1 et z_2 intérieurs à D la limite inférieure des longueurs des polygones contenues dans D et joignant z_1 et z_2. Nous désignons cette distance par $d_r(z_1, z_2)$. Nous appelons *distance relative* entre le point z_1, intérieur à D, et le point z_2, appartenant à la frontière de D, le nombre $d_r(z_1, z_2) = \liminf\limits_{z \to z_2} d_r(z_1, z_2)$, z tendant vers z_2 en restant dans D.

DÉFINITION II. — Nous disons que le point z_0 de la frontière de D est *atteint* (inatteint) *par un chemin fini*, si la distance relative entre un point quelconque z_1 intérieur à D et le point z_0 est finie (infinie).

Cela posé, soit D un domaine simplement connexe d'aire égale à 1 et soit F la frontière de D. Faisons la transformation conforme de D sur le cercle $|w| < 1$. Soit $w = f(z)$ la fonction qui réalise cette transformation. Nous supposons que $f(z_0) = 0$, alors :

THÉORÈME I. — *On a* $1 - |f(z)| < \frac{K_1}{\rho}$ *pour chaque valeur de* z, $d_r(z_0, z) > \rho$, *où* K_1 *est une constante* absolue, ρ *un nombre* positif *quelconque*.

THÉORÈME II. — *L'aire de l'ensemble des points du cercle* $|w| < 1$ *qui cor-*

---

port des arcs correspondants est, à un facteur constant près, plus petit que le module du logarithme de l'arc de Γ.

La démonstration de notre théorème est une application simple du principe indiqué et du lemme géométrique suivant : *Si* Γ *est une courbe simple fermée et à courbure bornée, il existe toujours un nombre positif* ρ *tel que chaque circonférence de rayon plus petit que* ρ *coupe* Γ *au plus en deux points.*

respondent aux points de D où $d_z(z_0, z) > \rho$ est plus petite que $\frac{K_2}{\rho^2}$, K_2 étant une constante absolue.

Théorème III. — *La mesure de l'ensemble des points de la circonférence $|w| = 1$ qui correspondent aux points z de F où $d_z(z_0, z) > \rho$ est plus petite que $\frac{K_3}{\rho}$, K_3 étant une constante absolue.*

Comme conséquence du théorème III nous obtenons immédiatement le

Corollaire. — *Dans une représentation conforme de D sur un cercle il correspond à l'ensemble des points de F inatteints par des chemins finis un ensemble de mesure* nulle *de la circonférence.*

D'après un théorème de MM. Lusin et Priwaloff [1] on déduit du corollaire un nouveau cas d'unicité des fonctions analytiques.

Théorème d'unicité. — *Deux fonctions analytiques, holomorphes dans un domaine jordanien D et prenant les mêmes valeurs en chaque point de la frontière de D qui est atteint par un chemin fini, sont identiques.*

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur les fonctions méromorphes représentées par un développemenl de Taylor à coefficients rationnels.* Note [2] de M. **Spyridion Sarantopoulos**, présentée par M. Émile Borel.

1. M. Borel dans un Livre [3] de sa belle Collection de Monographies sur la théorie des fonctions, donne une application importante de quelques résultats qui sont dus à M. Hadamard [4]. Ces résultats intéressants concernent les fonctions méromorphes qui sont représentées par un développement de Taylor. M. Borel démontre le théorème suivant :

Une fonction méromorphe dans un cercle de rayon supérieur à l'unité ne saurait être représentée dans ce cercle par un développement de Taylor à coefficients entiers sans se réduire au quotient de deux polynomes à coefficients entiers [5].

2. Le théorème de M. Borel n'épuise pas la question relative. On peut y aller plus loin et déterminer d'une manière plus complète la forme de la fonction méromorphe donnée par un développement de Taylor à coeffi-

(1) N. Lusin et Z. Priwaloff, *Sur l'unicité et multiplicité des fonctions analytiques* (*Annales scient. de l'École Normale supérieure*, 42, 1925, p. 164).

(2) Séance du 7 juin 1927.

(3) *Leçons sur les fonctions méromorphes*, 1903, p. 32-38.

(4) *Essai sur l'étude des fonctions données par le développement de Taylor* (*Journal de M. Jordan*, 8, 1892, p. 101).

(5) Voir Borel, *Bulletin des Sciences mathématiques*, 18, 1894, p. 22.