Supposons le contraire : dans les classes intégrables K_1 et K_2 il existe deux fonctions $F_1(x)$ et $F_2(x)$ différentes. La dérivée — X de

$$\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x)$$

est presque partout nulle. Supposons $\Phi(x_0) > 0$, $x_0 > 0$ (les autres cas sont analogues). Posons

$$\psi(x) = x + \max_{\alpha=0}^{\alpha=x}[\Phi(\alpha)] \quad \text{si} \quad x > 0;$$
$$\psi(x) = x, \quad \text{si} \quad x \leqq 0;$$

$\varphi(x)$ fonction inverse ($\varphi[\psi(x)] = x$), vérifie la condition donnée du commencement. La fonction

$$\Phi[\varphi(x)] = F_1[\varphi(x)] - F_2[\varphi(x)]$$

a la dérivée non nulle sur un ensemble de mesure positive, ce qui est impossible.

Théorème II. — *Pour un procédé de dérivation-X il existe une classe K^m intégrable X qui contient toutes les autres.*

Théorème III. — *Pour la dérivation asymptotique la classe K^m intégrable coïncide avec la classe de toutes les fonctions totalisables de M. Denjoy.*

Remarque. — Nous ne donnons pas dans cette Note une définition axiomatique complète de la dérivation. Il en résulte la possibilité, qu'à des procédés de dérivation différents peuvent correspondre des intégrales différentes.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur les sous-classes de la classification de M. Baire.* Note de M. **M. Lavrentieff**, présentée par M. Émile Borel.

Je me propose ici d'obtenir une décomposition de chaque classe des ensembles mesurables B en aleph-un sous-classes non vides. C'est M. N. Lusin qui m'a guidé dans mes recherches et c'est à lui tout d'abord que je dois l'idée ci-dessous des résultats, ainsi que les définitions fondamentales.

1. *Principes de la classification des ensembles.* — Prenons, pour l'espace fondamental, l'ensemble de tous ces points irrationnels compris entre 0 et 1. L'ensemble des points irrationnels qui appartient à un intervalle (a, b) à extrémités rationnelles est dit *portion*.

Une suite d'ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ est dite *convergente* lorsque ses ensembles-limites (complet et restreint) sont identiques; nous appelons *ensemble-limite* cet ensemble-limite commun E et écrivons $E = \lim_{n \to \infty} E_n$.

Aux différents nombres ordinaux des classes I et II nous ferons correspondre des classes d'ensembles au moyen de la définition suivante :

1° Un ensemble formé par la réunion d'une infinité dénombrable de portions dont le complément est de même nature appartient à la classe 0.

2° Un ensemble appartient à la classe α ($\alpha > 0$) s'il est la limite d'une suite d'ensemble appartenant à des classes marquées par des nombres inférieurs à α, et s'il ne fait pas partie de l'une de ces classes.

Nous dirons qu'un ensemble est *atteint supérieurement* (*inférieurement*) s'il est la partie commune (somme) à une infinité dénombrable d'ensembles de classes $< \alpha$; dans le cas contraire un ensemble est dit *non atteint*. Il y a, dans toute classe de la classification, des ensembles atteints supérieurement et inférieurement, et des ensembles non atteints.

Nous allons considérer les ensembles de classe α atteints supérieurement comme des formations les plus primitives de cette classe et étudier à ce point de vue la structure des ensembles non atteints. La raison pour ce point de vue est l'analogie profonde qu'il y a entre les points et les ensembles atteints supérieurement. A cause de cette analogie nous appelons *éléments* α les ensembles atteints supérieurement.

2. *Séparabilité.* — Nous dirons que deux ensembles de classe α, E_1 et E_2, n'ayant pas de points communs, sont *séparables*, s'il existe deux ensembles, $\overline{E}_1$ et $\overline{E}_2$, de classes $< \alpha$, n'ayant pas de points communs et contenant respectivement E_1 et E_2. Nous avons le

Théorème I. — *Deux éléments $\alpha + 1$ quelconques sans points communs sont séparables.*

De ce théorème nous déduisons un lemme qui joue dans la théorie considérée un rôle essentiel.

Lemme. — *Pour que la somme d'une infinité dénombrable d'éléments $\alpha + 1$, $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$, deux à deux sans points communs, soit un ensemble de classe $\leq \alpha + 1$, il faut et il suffit qu'il existe une infinité dénombrable d'ensembles $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n, \ldots$ de classe $< \alpha + 1$ et tels que : 1° $\overline{e}_n > e_n$; 2° l'ensemble limite des $\overline{e}_n$ est vide.*

3. *Les ensembles clairsemés.* — Soit $M = \{e_t\}$ un ensemble de points α deux à deux sans points communs; nous appelons *isolé* un élément $\alpha\, e_{t_0}$, s'il existe un ensemble $\overline{e}_{t_0}$ de classe $< \alpha$ tel que : 1° $\overline{e}_{t_0} > e_{t_0}$ et 2° $\overline{e}_{t_0} \equiv 0$, $t \neq t_0$.

En utilisant l'idée d'analogie entre les éléments α et les points on obtient naturellement la notion d'ensemble clairsemé d'éléments α; nous appelons ensemble clairsemé d'éléments α l'ensemble $M = \{e_t\}$ d'éléments α, deux à deux sans points communs et tel qu'il existe dans tout sous-ensemble de M un élément α isolé.

Soit $M = \{e_t\}$ un ensemble clairsemé d'éléments α. D'après un raisonnement connu de M. Zermelo, on peut toujours ranger les éléments αe_t de l'ensemble M dans une suite transfinie telle que chacun de ses éléments $\alpha\, e_t$ est isolé dans l'ensemble d'éléments α qui le suivent dans la suite considérée. Si l'ensemble M est dénombrable, le principe du choix arbitraire devient inutile.

Soit

$$M = \{e_n\} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

un ensemble clairsemé d'éléments αe_n. Nous pouvons donc ranger ces éléments dans une suite transfinie

$$e_0^*, \; e_1^*, \; \ldots, \; e_\omega^*, \; \ldots, \; e_\beta^*, \; \ldots \qquad |\gamma < \Omega|$$

telle que, quel que soit $\beta < \gamma$, l'élément e_β^* est isolé dans l'ensemble $M = \{e_{\beta'}\}$, $\beta' > \beta$. Nous appellerons le nombre γ le *type de l'ensemble clairsemé* M.

Nous avons pour les ensembles clairsemés les théorèmes fondamentaux suivants :

Théorème fondamental. — *La somme d'une infinité dénombrable d'éléments α qui forment un ensemble clairsemé est un ensemble de classe α.*

Théorème inverse. — *Tout ensemble de classe α est la somme d'une infinité dénombrable d'éléments α qui forment un ensemble clairsemé et d'un ensemble atteint inférieurement.*

4. *Les sous-classes.* — D'après ce qui précède nous pouvons décomposer formellement toute classe transfinie α d'ensembles mesurables β en aleph-un sous-classes au moyen de la définition suivante : 1° un ensemble de classe α appartient à la sous-classe o s'il est atteint supérieurement ou inférieurement; 2° un ensemble de classe α appartient à la sous-classe $\beta > 0$, s'il n'appartient à aucune sous-classe $\beta' < \beta$; mais s'il est la somme d'une infinité dénombrable d'éléments α, formant un ensemble clairsemé du type $\omega\beta$ et d'un ensemble atteint inférieurement.

On peut démontrer ceci :

Théorème II. — *Quels que soient les nombres $\alpha < \Omega$ et $\beta < \Omega$, il existe toujours un ensemble* E *de classe α et de sous-classe β.*

En appliquant un théorème sur les ensembles homéomorphes ([1]), on obtient facilement le résultat suivant :

THÉORÈME III. — *Tout ensemble homéomorphe à un ensemble de classe $\alpha > 2$ et de sous-classe 3 appartient à la même classe et à la même sous-classe.*

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur la dérivée-limite d'une fonction analytique.* Note de M. V. WENIAMINOFF, présentée par M. Émile Borel.

Soit $w = f(z)$ une fonction analytique, uniforme à l'intérieur du cercle $|z| \leqq 1$.

DÉFINITION. — *Nous dirons que la fonction $f(z)$ a une dérivée-limite $\varphi(z_0)$ en un point z_0, $|z_0| = 1$, s'il existe une limite $\varphi(z_0) = \lim_{z \to z_0} f'(z)$ lorsque z tend vers z_0 le long d'un chemin quelconque situé à l'intérieur du cercle $|z| \leqq 1$ et non tangent à la circonférence.*

La question qui se pose maintenant est la suivante : *Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une dérivée-limite sur un ensemble* E, Mes. $E > 0$ $[E = \{z\}, |z| = 1]$.

Le but de cette Note est de résoudre le problème posé. Avant d'aborder cette question, nous avons besoin d'une définition préliminaire.

Soient $z = \psi(w)$ la fonction inverse pour la fonction $f(z)$ et R la surface de Riemann correspondant à $\psi(w)$.

DÉFINITION. — *Nous dirons que la surface de Riemann* R *a une enveloppe $\mathfrak{L}$, s'il existe une courbe rectifiable $\mathfrak{L}$, intérieure à la surface* R *et dont l'ensemble des points appartenant à la fois à $\mathfrak{L}$ et à la frontière de la surface est de mesure positive.*

THÉORÈME. — *La condition cherchée consiste en ce que* R *ait des enveloppes $\mathfrak{L}$.*

Voici les considérations qui ont conduit à ce résultat.

La condition est nécessaire. — Supposons qu'il existe une dérivée-limite en tout point de l'ensemble E ; dans ces conditions, on peut démontrer en employant la méthode de M. Privaloff ([2]), qu'il existe à l'intérieur du cercle $|z| \leqq 1$ une ligne rectifiable C dont l'ensemble des points communs à C et à $|z| = 1$ est de mesure positive, le long de laquelle les valeurs de la dérivée ordinaire et de la dérivée-limite forment une fonction continue.

En appliquant ensuite à $f(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ le théorème

([1]) *Comptes rendus*, t. 178, 1924, p. 187.

([2]) *Intégrale de Cauchy* (Thèse russe), 1919, p. 39.