

Sur la représentation des fonctions mesurables B par les séries transfinies de polynomes.

Par

M. M. Lavrentieff (Moscou).

Dans sa Note „*Sur les suites transfinies convergentes de fonctions de Baire*“¹⁾ M. Sierpiński a posé la question suivante: *Peut-on représenter toute fonction de classe 2 par une série transfinie de polynomes*²⁾?

Je donnerai ici une réponse affirmative à cette question, en démontrant une proposition plus générale que voici:

Pour qu'une fonction soit de classe $\leq \alpha$, il faut et il suffit qu'elle soit représentable par une série transfinie de polynomes du type ω^α .

Lemme I. *Toute fonction de classe α (finie ou non) peut être considérée comme limite d'une suite (de type ω) de fonctions bornées de classes $< \alpha$* ³⁾.

Pour démontrer ce lemme, il suffit de remplacer toute fonction $f_n(x)$, de la suite de fonctions de classes $< \alpha$, convergente vers $f(x)$, par une fonction $\varphi_n(x)$, égale à $f_n(x)$, si $|f_n(x)| \leq n$, à n , si $f_n(x) > n$, et à $-n$, si $f_n(x) < -n$ (ce qui n'altère pas la classe, d'après Baire⁴⁾).

Lemme II. *Toute fonction f bornée de classe α peut être considérée comme limite d'une suite de fonctions de classes $< \alpha$, dont chacune est comprise entre les bornes de f .*

A et B étant les bornes de f , il suffit, pour démontrer notre lemme, de remplacer $f_n(x)$ par une fonction égale à $f(x)$, si $A \leq f_n(x) \leq B$, à A , si $f_n(x) < A$, à B , si $f_n(x) > B$.

¹⁾ *Fundamenta Mathematicae* t. 1, p. 135.

²⁾ Les définitions d'une suite et d'une série transfinie (de nombres réels ou de fonctions) se trouvent dans la Note citée de M. Sierpiński.

³⁾ Cf. R. Baire: *Acta Mathematica*, t. 30, p. 7.

⁴⁾ Loc. cit. p. 3.

Lemme III. *Toute fonction f bornée de classe 1 est, dans un intervalle fini, limite d'une suite de polynômes, dont chacun est compris entre les bornes de f .*

Soit, en effet, $A \leq f(x) \leq B$, pour $a \leq x \leq b$; $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, où $f_n(x)$ sont des fonctions continues dans (a, b) .

n étant un nombre naturel donné quelconque, posons

$$\varphi_n(x) = f_n(x), \text{ si } A + \frac{B-A}{n} \leq f_n(x) \leq B - \frac{B-A}{n};$$

$$\varphi_n(x) = A, \text{ si } f_n(x) < A + \frac{B-A}{n};$$

$$\varphi_n(x) = B, \text{ si } f_n(x) > B - \frac{B-A}{n};$$

les fonctions $\varphi_n(x)$ seront évidemment continues, et nous aurons

$$(1) \quad A + \frac{B-A}{n} \leq \varphi_n(x) \leq B - \frac{B-A}{n},$$

et

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = f(x).$$

Or, d'après le théorème de Weierstrass, il existe pour la fonction $\varphi_n(x)$, continue et bornée dans (a, b) , un polynôme $P_n(x)$, tel que

$$(3) \quad |\varphi_n(x) - P_n(x)| < \frac{B-A}{n}, \text{ pour } a \leq x \leq b,$$

ce qui donne, d'après (1):

$$A \leq P_n(x) \leq B;$$

or, d'après (2) et (3) nous avons:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = f(x);$$

la suite de polynômes $P_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) est donc la suite cherchée.

Lemme IV. *A et B étant deux nombres réels finis, $f(x)$ une fonction de classe α , telle que $A \leq f(x) \leq B$, et ε_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) une suite convergente vers 0, il existe toujours une suite $f_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) de fonctions de classes $< \alpha$ tendant vers $f(x)$ et telle que*

$$A + (B-A)\varepsilon_n \leq f_n(x) \leq B - (B-A)\varepsilon_n, \text{ pour } n = 1, 2, 3, \dots$$

Soit, en effet, $\varphi_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) une suite infinie de fonctions de classes $< \alpha$ ayant $f(x)$ pour limite. Pour obtenir la suite $f_n(x)$ satisfaisant aux conditions de notre lemme, il suffira, comme on voit sans peine, poser

$$f_n(x) = \varphi_n(x), \quad \text{si } A + (B - A)\varepsilon_n \leq \varphi_n(x) \leq B - (B - A)\varepsilon_n;$$

$$f_n(x) = A + (B - A)\varepsilon_n, \quad \text{si } \varphi_n(x) < A + (B - A)\varepsilon_n,$$

et

$$f_n(x) = B - (B - A)\varepsilon_n, \quad \text{si } \varphi_n(x) > B - (B - A)\varepsilon_n.$$

Lemme V. *Toute fonction $f(x)$ (finie ou non) de classe α peut être considérée comme limite d'une suite $f_k(x)$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) de fonctions de classes $< \alpha$, telles que*

$$(4) \quad |f_{k+1}(x) - f_k(x)| \leq \varepsilon_k \leq \frac{1}{p}. \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

p étant un nombre naturel quelconque donné d'avance, et ε_k ($k = 1, 2, \dots$) des nombres positifs tendant vers 0.

Démonstration. Soit $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x)$; et $\varphi_n(x) < \alpha$ ¹⁾. D'après le lemme I nous pouvons supposer

$$(5) \quad \varphi_n(x) \leq n.$$

Posons $\varphi_0(x) \equiv 0$; nous pouvons alors écrire

$$(6) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)].$$

Selon (5) nous aurons

$$(7) \quad |\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)| \leq |\varphi_{n+1}(x)| + |\varphi_n(x)| \leq 2n + 1.$$

Remplaçons maintenant tout terme $\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)$ de la série (6) par une somme de $p(2n+1)^2$ termes donc chacun est $= \frac{\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)}{p(2n+1)^2}$, et désignons par $f_n(x)$ la somme de k premiers termes de la série ainsi obtenue. Nous aurons évidemment et $f_n(x) < \alpha$, $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x)$, et, d'après (7):

$$|f_{k+1}(x) - f_k(x)| = \frac{|\varphi_{n_k+1}(x) - \varphi_{n_k}(x)|}{p(2n_k+1)^2} \leq \frac{1}{p(2n_k+1)} \leq \frac{1}{p},$$

¹⁾ Nous désignons, suivant M. Lusin, par le symbole $\text{cl } f(x)$ la classe de la fonction $f(x)$.

où $n_k (k=1, 2, \dots)$ est une suite infinie de nombres naturels, croissante indéfiniment avec k : donc, en posant $\varepsilon_n = \frac{1}{p(2n_k+1)}$, nous aurons l'inégalité (4), ce qui prouve notre lemme.

Théorème. 1^o. Toute fonction $f(x)$ de classe α est une somme d'une série transfinie de polynomes de type ω^α .

2^o. Si $f(x)$ est une fonction bornée de classe α et k un nombre naturel donné, il existe une série transfinie de polynomes de type ω^α ayant $f(x)$ pour somme, et telle que toutes ses sommes partielles sont comprises entre les bornes de $f(x)$, pour $|x| \leq k$.

Démonstration. Dans le cas $\alpha=1$ les deux propositions résultent du théorème connu de Weierstrass et du lemme III.

Soit maintenant α un nombre ordinal donné quelconque, $1 < \alpha < \Omega$ et supposons que les propositions 1^o et 2^o sont vraies pour tout nombre ordinal $\xi < \alpha$: nous prouverons qu'elles seront encore vraies pour le nombre α .

1^o. Soit $f(x)$ une fonction quelconque de classe α , et soit

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x); \text{ et } f_n(x) = \alpha_n < \alpha; \quad \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \dots$$

D'après le lemme V, nous pouvons supposer

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq \varepsilon_n,$$

où $\varepsilon_n (n=1, 2, 3, \dots)$ est une suite, telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$.

La proposition 2^o étant, par hypothèse, vraie pour $\xi < \alpha$, nous pouvons écrire, en posant $f_0(x) \equiv 0$:

$$(8) \quad f_{n+1}(x) - f_n(x) = \sum_{\xi < \omega^{\alpha_{n+1}}} P_\xi^{(n)}(x),$$

où $P_\xi^{(n)}(x) (\xi < \omega^{\alpha_{n+1}}, n=0, 1, 2, \dots)$ sont des polynomes, et où nous avons

$$(9) \quad \left| \sum_{\xi < \gamma} P_\xi^{(n)}(x) \right| \leq \varepsilon_n, \text{ pour } \gamma < \omega^{\alpha_{n+1}} \text{ et } |x| \leq n.$$

Soit maintenant β un nombre ordinal donné quelconque $< \omega^\alpha$: on voit sans peine que β peut être écrit (d'une façon unique) sous la forme

$$\beta = \omega^{\alpha_1} + \omega^{\alpha_2} + \dots + \omega^{\alpha_n} + \gamma,$$

où n est un nombre naturel ou 0, et γ un nombre ordinal $< \omega^{\alpha_{n+1}}$.

Posons, pour tout $\beta < \alpha$:

$$(10) \quad S_\beta(x) = S_{\omega^{\alpha_1 + \omega^{\alpha_2} + \dots + \omega^{\alpha_n} + \gamma}}(x) = f_n(x) + \sum_{\xi < \gamma} P_\xi^{(n)}(x).$$

De (10) résulte sans peine que $S_{\xi+1}(x) - S_\xi(x)$ sont des polynomes, pour $\xi < \omega^\alpha$. Donc

$$(11) \quad \sum_{\xi < \omega^\alpha} [S_{\xi+1}(x) - S_\xi(x)]$$

est une série de polynomes de type ω^α : démontrons qu'elle a $f(x)$ pour somme.

Or, soit x_0 un nombre réel donné, ε — un nombre positif donné quelconque. D'après $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ et d'après $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$, il existe un indice $N \geq |x_0|$, tel que

$$(12) \quad |f(x_0) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{et} \quad \varepsilon_n < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{pour} \quad n \geq N.$$

D'autre part, d'après (9), nous avons

$$(13) \quad \left| \sum_{\xi < \gamma} P_\xi^{(n)}(x_0) \right| \leq \varepsilon_n, \quad \text{pour} \quad \gamma < \omega^{\alpha_{n+1}} \quad \text{et} \quad n \geq N.$$

Les formules (10), (12) et (13) donnent donc:

$$(14) \quad |S_{\omega^{\alpha_1 + \omega^{\alpha_2} + \dots + \omega^{\alpha_n} + \gamma}}(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon, \quad \text{pour} \quad n \geq N, \quad \gamma < \omega^{\alpha_{n+1}}.$$

Posons $\mu = \omega^{\alpha_1} + \omega^{\alpha_2} + \dots + \omega^{\alpha_n}$: d'après $\alpha_n < \alpha$, pour $n = 1, 2, \dots$, nous aurons, comme on voit sans peine, $\mu < \omega^\alpha$. Or, pour $\beta = \omega^{\alpha_1} + \omega^{\alpha_2} + \dots + \omega^{\alpha_n} + \gamma > \omega^{\alpha_1} + \omega^{\alpha_2} + \dots + \omega^{\alpha_n} = \mu$, nous avons évidemment $n \geq N$, donc, d'après (14):

$$|S_\beta(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad \mu < \beta < \omega^\alpha,$$

ce qui prouve que $\lim_{\beta < \omega^\alpha} S_\beta(x) = f(x_0)$, donc que

$$\sum_{\xi < \omega^\alpha} [S_{\xi+1}(x_0) - S_\xi(x_0)] = f(x_0)$$

La somme (11) est donc égale à $f(x)$ pour tout x réel, ce qui prouve la proposition 1°.

2°. Soit $A \leq f(x) \leq B$, et $f(x) = a$, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, et $f_n(x) = \alpha_n < a$,

et soit k un nombre naturel donné. D'après les lemmes V et IV, nous pouvons supposer

$$(15) \quad |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon_n < B - A, \quad \text{pour } n = 1, 2, 3, \dots,$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$, et

$$(16) \quad A + (B - A)\varepsilon_n \leq f_n(x) \leq B - (B - A)\varepsilon_n, \quad \text{pour } n = 1, 2, 3, \dots$$

En conservant les notations utilisées dans la première partie de notre démonstration, nous aurons la formule (8) et nous pourrons supposer (d'après l'hypothèse que la proposition 2° est vraie pour $\xi > \alpha$):

$$(17) \quad \left| \sum_{\xi < \gamma} P_{\xi}^{(n)}(x) \right| \leq \varepsilon_n, \quad \text{pour } \gamma < \omega^{\alpha+n+1} (n = 0, 1, 2, \dots) \text{ et } |x| \leq k.$$

Les formules (10), (16) et (17) donnent:

$$A + (B - A)\varepsilon_n - \varepsilon_n \leq S_{\beta}(x) \leq B - (B - A)\varepsilon_n + \varepsilon_n,$$

done, d'après $\varepsilon_n < B - A$:

$$A < S_{\beta}(x) < B, \quad \text{pour } \beta < \alpha, \quad \text{c. q. f. d.}$$

Notre théorème est ainsi démontré par l'induction transfinie.

Théorème inverse: *La somme d'une série transfinie de polynômes du type $\omega^{\alpha} + \gamma$, où $\gamma + \omega^{\alpha+1}$, est une fonction de classe $\leq \alpha$.*

Démonstration. Faisons d'abord la remarque suivante. Si la somme de toute série transfinie convergente de polynômes de type ω^{α} est une fonction de classe $\leq \alpha$, la somme d'une série transfinie de polynômes de type $\omega^{\alpha} + \gamma$, où $\gamma < \omega^{\alpha+1}$, est de même une fonction de classe $\leq \alpha$. En effet, d'après $\gamma < \omega^{\alpha+1}$, il existe un nombre naturel n , tel que $\omega^{\alpha} + \gamma = \omega^{\alpha} \cdot n + \gamma_1$, où $\gamma_1 < \omega^{\alpha}$, donc

$$\sum_{\xi < \omega^{\alpha} + \gamma} P_{\xi}(x) \equiv \sum_{\xi < \omega^{\alpha}} P_{\xi}(x) + \sum_{\omega^{\alpha} \leq \xi < \omega^{\alpha} \cdot 2} P_{\xi}(x) + \dots + \sum_{\omega^{\alpha} \cdot (n-1) \leq \xi < \omega^{\alpha} \cdot n} P_{\xi}(x) + \sum_{\omega^{\alpha} \cdot n \leq \xi < \omega^{\alpha} \cdot n + \gamma_1} P_{\xi}(x).$$

Chacune de $n+1$ sommes à droite étant une série transfinie de type ω^{α} ¹⁾, donc, d'après l'hypothèse, une fonction de classe $\leq \alpha$, leur somme est une fonction de classe $\leq \alpha$ (d'après le théorème de M. Baire sur les sommes finies de fonctions de classe $\leq \alpha$). Notre

¹⁾ La dernière série à droite peut être complétée à une série de type ω^{α} par l'adjonction des termes $= 0$.

remarque est ainsi justifiée. Il en résulte qu'il suffira de démontrer notre théorème pour les séries de type ω^α .

Pour $\alpha = 1$ notre théorème est vrai évidemment. Supposons qu'il est vrai pour $\xi < \alpha$, α étant un nombre ordinal donné $< \Omega$. Deux cas sont possibles:

1) $\alpha = \beta + 1$. Considérons les sommes partielles

$$S_{\omega^\beta}(x), S_{\omega^{\beta,2}}(x), \dots, S_{\omega^{\beta,n}}(x), \dots;$$

notre théorème étant par hypothèse, vrai pour $\beta < \alpha$, nous avons, en vertu de notre remarque: $\text{cl } S_{\omega^{\beta,2}} \leq \alpha$, donc

$$\text{cl } S_{\omega^\alpha}(x) = \text{cl } [\lim_{n \rightarrow \infty} S_{\omega^{\beta,n}}(x)] \leq \beta + 1 = \alpha.$$

2) α est un nombre de seconde espèce, soit $\alpha = \lim \alpha_n$. Les sommes partielles $S_{\omega^{\alpha_1}}(x), S_{\omega^{\alpha_1 + \omega^{\alpha_2}}}(x), \dots, S_{\omega^{\alpha_1 + \omega^{\alpha_2} + \dots + \omega^{\alpha_n}}}(x)$ sont, d'après l'hypothèse, de classes $< \alpha$, donc

$$\text{cl } S_{\omega^\alpha}(x) = \text{cl } [\lim_{n \rightarrow \infty} S_{\omega^{\alpha_1 + \omega^{\alpha_2} + \dots + \omega^{\alpha_n}}}(x)] \leq \alpha, \quad \text{c. q. f. d.}$$

Notre théorème est ainsi établi. Remarquons qu'on pourrait démontrer par un raisonnement analogue qu'une somme d'une série transfinie de type $\omega^\alpha + \gamma$ ($\gamma < \omega^{\alpha+1}$) de fonctions de classes $\leq \beta$ est une fonction de classe $\leq \alpha + \beta$.

Moscou, le 13 décembre 1922.