que soit la suite de domaines V_{i_1}, V_{i_2}, ..., V_{i_k}, ... de ce système telle que V_{i_k} contient $V_{i_{k+1}}$, il y a des points appartenant au produit de tous les $\overline{V_{i_k}}$ (où $\overline{V_i}$ est la somme de V_{i_k} et de tous les points limites de V_{i_k} situés dans E).

4° Un système Π de domaines de E forme une *couverture dispersée* si, quel que soit le point ξ de E : (*a*) il est contenu dans au moins un domaine du système Π; (*b*) il existe un certain voisinage de ξ qui n'a des points communs qu'avec un nombre fini de domaines du système Π.

5° Un système déterminant Σ s'appelle *normal* si, quel que soit le système déterminant Σ_0 faisant partie de Σ, on peut en extraire une couverture.

Cela posé, le théorème I résulte, comme on l'apercevra facilement, du théorème suivant :

Théorème II. — *Pour que* E, *qui est :*

un ensemble situé dans une classe ($\mathfrak{D}$) *complète soit un ensemble* G_δ *dans cet espace,*	*une classe* ($\mathfrak{D}$) *séparable, soit complète,*

il faut et il suffit que l'on puisse, de tout système déterminant E, *extraire un système déterminant clos.*

Ce qui est le plus difficile dans la démonstration de ce théorème, c'est la suffisance de la condition pour les espaces complets (la nécessité résulte d'un théorème de M. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, p. 318); elle peut être démontrée à l'aide du lemme suivant :

Lemme. — *Il existe pour toute classe* ($\mathfrak{D}$) *séparable un système déterminant normal.*

En s'appuyant sur ce lemme, on peut construire un système déterminant *clos* S tel que : 1° les domaines formant S se distribuent en une suite Π_1, Π_2, ..., Π_n, ... de *couvertures dispersées;* 2° la suite des Π_n est une *chaîne complète régulière* (¹). Or, on peut se baser sur les systèmes Π_n pour introduire entre les points de l'espace donné une distance nouvelle de façon à obtenir une classe ($\mathfrak{D}$) complète (²). C. Q. F. D.

THÉORIE DES ENSEMBLES. — *Sur la recherche des ensembles homéomorphes.* Note de M. **M. Lavrentieff**, présentée par M. Henri Lebesgue.

On dit que deux ensembles sont homéomorphes, lorsqu'on peut établir entre leurs éléments une correspondance bicontinue, univoque et réci-

(¹) Voir la Note de MM. Alexandroff et Urysohn, *Une condition nécessaire et suffisante* (*Comptes rendus*, t. 177, 1923, p. 1274).

(²) La définition de cette distance est plus compliquée, mais repose sur la même idée directrice que celle de la Note citée. La démonstration du fait qu'on obtient ainsi un espace complet repose sur la clôture du système déterminant S et sur ce que les Π_n sont des couvertures dispersées.

proque. La question se pose naturellement de savoir s'il est possible de déterminer une correspondance de même nature entre les points de deux ensembles *extrêmement simples*, contenant les ensembles donnés, cette correspondance coïncidant avec la première pour les points des deux ensembles donnés.

Je me propose de donner ici une réponse affirmative à cette question et je m'occuperai ensuite de quelques applications aux ensembles effectifs (nommables) connus jusqu'à présent. C'est à M. N. Lusin que je dois le principe du théorème fondamental.

1. *La recherche des ensembles homéomorphes.* — Nous ne considérons que les ensembles linéaires et nous utilisons les notations de M. Hausdorff : désignons par G l'ensemble de points formé par la réunion d'intervalles ouverts donnés; nous désignons par G_δ l'ensemble de points communs à une infinité dénombrable d'ensembles G.

Avec ces notations nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème fondamental. — *S'il existe une correspondance bicontinue, univoque et réciproque, entre deux ensembles linéaires appartenant à deux droites différentes, il est possible de déterminer une correspondance de même nature entre tous les points des deux ensembles* du type G_δ *enfermant les ensembles donnés, la seconde correspondance coïncidant avec la première pour les points des deux ensembles donnés.*

En effet, soient E et $\mathcal{E}$ les ensembles homéomorphes dont le premier est situé sur l'axe des x, le second sur l'axe des y. Soit $y = f(x)$ et $x = \varphi(y)$ une correspondance homéomorphe entre ces ensembles. La fonction $f(x)$ étant définie sur E, est continue en tout point de E par rapport à cet ensemble; la fonction $\varphi(y)$ possède les mêmes propriétés par rapport à l'ensemble $\mathcal{E}$. Prenons la réunion de E et de son dérivé E'; soit donc

$$F = E + E';$$

F est un ensemble fermé; d'une manière analogue soit $\mathcal{F} = \mathcal{E} + \mathcal{E}'$. Définissons sur F une fonction $f^*(x)$ égale *au minimum* de $f(x)$ en tout point x de F. La fonction $f^*(x)$ ainsi définie coïncide avec $f(x)$ pour les points de E; de plus elle est continue en tout point de E relativement à F. Soit E^* l'ensemble des points de continuité de $f^*(x)$, $E < E^* < F$. D'après un théorème connu, l'ensemble E^* est un ensemble du type G_δ. Formons de même une fonction $\varphi^*(y)$ et un ensemble $\mathcal{E}^*$ pour l'ensemble $\mathcal{F}$, $\mathcal{E} < \mathcal{E}^* < \mathcal{F}$. Soit E^{**} l'ensemble de points de E^* pour lesquels les valeurs de $f^*(x)$ sont contenues dans $\mathcal{E}^*$; on a $E < E^{**} < E^* < F$. Nous allons déterminer le type de E^{**} : un ensemble de points de E^* pour lesquels les valeurs de $f^*(x)$ sont contenues dans un ensemble quelconque du type G, étant formé par la réunion des portions de E^*, est du type G_δ; donc l'ensemble $\mathcal{E}^*$ étant du type G_δ, nous en conclurons que E^{**} l'est aussi. De même, soit $\mathcal{E}^{**}$ un ensemble de points y de $\mathcal{E}^*$ pour lesquels on a $\varphi^*(y) < E^*$; nous avons $\mathcal{E} < \mathcal{E}^{**} < \mathcal{E}^* < \mathcal{J}$; $\mathcal{E}^{**}$ est du type G_δ. Nous allons démontrer que les ensembles E^{**} et $\mathcal{E}^{**}$ vérifient le théorème proposé.

Il suffit de montrer que les équations $y = f^*(x)$ et $x = \varphi^*(y)$ donnent une correspondance homéomorphe entre E^{**} et $\mathcal{E}^{**}$. Soit, en effet, x_0 un point de E^{**}. D'après la définition de E^{**} le point $y_0 = f^*(x_0)$ est contenu dans $\mathcal{E}^*$, donc le point y_0 est un point de continuité de la fonction $\varphi^*(y)$. D'autre part le point x_0 est un point de continuité de $f^*(x)$. Il en suit sûrement que $\varphi^*(y_0) = x_0$, donc x_0 étant contenu dans E^*, y_0 est contenu dans $\mathcal{E}^{**}$. Des raisonnements tout semblables montrent que, si y_1 est un point de $\mathcal{E}^{**}$, le point $x_1 = \varphi^*(y_1)$ est contenu dans E^{**} et $f^*(x_1) = y_1$. Donc les équations $y = f^*(x)$ et $x = \varphi^*(y)$ établissent une correspondance univoque et réciproque entre E^{**} et $\mathcal{E}^{**}$; d'ailleurs, c'est cette correspondance qui est bicontinue, en vertu de la continuité des fonctions $f^*(x)$ et $\varphi^*(x)$, respectivement sur E^{**} et $\mathcal{E}^{**}$, ce qui prouve la proposition.

L'ensemble complémentaire de G_δ étant F_δ, nous en déduisons le corollaire suivant :

Corollaire. — *Si deux ensembles sont homéomorphes, les deux ensembles complémentaires le sont aussi, à deux ensembles F_σ près.*

2. *Application aux types de M. Hausdorff.* — Rappelons l'échelle des symboles de M. Hausdorff. Nous avons déjà défini les ensembles de types G, F, G_δ et F_σ; les sommes (produits) dénombrables des ensembles $G_\delta(F_\sigma)$ forment les ensembles du type $G_{\delta\sigma}(F_{\sigma\delta})$. En général, les sommes (produits) des ensembles $G_{(\delta\sigma)^n\sigma}$ et $F_{(\sigma\delta)^n}$ [$G_{(\delta\sigma)^n}$ et $F_{(\sigma\delta)^n\sigma}$] forment respectivement les ensembles de types $G_{(\delta\sigma)^{n+1}}$ et $F_{(\sigma\delta)^n\sigma}$ [$G_{(\delta\sigma)^n\delta}$ et $F_{(\sigma\delta)^{n+1}}$].

Avec ces notations nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème. — *L'ensemble homéomorphe à un ensemble d'un type déterminé est du même type.*

Pour les ensembles des types F, G et F_σ la proposition est élémentaire [1]. Appliquons le théorème fondamental au cas général [2].

[1] Pour les ensembles des types F et F_σ la démonstration est immédiate. Pour les ensembles du type G la proposition a été démontrée par M. Brouwer (*Math. Ann.*, t. 71, 1912).

[2] M. Sierpinski a démontré ce théorème pour les ensembles des types $G_{(\delta\sigma)^n}$

La chose est vraie pour les ensembles du type $F_\sigma = F_{(\sigma\delta)^0\sigma}$. Supposons la proposition vraie pour $F_{(\sigma\delta)^n\delta}$ et étendons-la aux $F_{(\sigma\delta)^{n+1}}$ et $F_{(\sigma\delta)^{n+1}\sigma}$.

Soit E un ensemble du type $F_{(\sigma\delta)^{n+1}}$ et soit $\mathcal{E}$ homéomorphe à E. Prenons, d'après le théorème fondamental, les ensembles E^{**} et $\mathcal{E}^{**}$. En vertu de la définition des ensembles $F_{(\sigma\delta)^{n+1}}$, on a $E = E_1 E_2 \ldots E_k \ldots$, où $E_k (k = 1, 2, 3, \ldots)$ sont des ensembles du type $F_{(\sigma\delta)^n\delta}$. L'ensemble E étant contenu dans E^{**}, nous avons $E = (E^{**}E_1)(E^{**}E_2)\ldots(E^{**}E_k)\ldots$.

Si nous avons $n \geqq 1$, les ensembles $(E^{**}E_k)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ sont du type $F_{(\sigma\delta)^n\sigma}$, donc à l'ensemble $(E^{**}E_k)$ correspond un ensemble déterminé, soit $\mathcal{E}_k$, du type $F_{(\sigma\delta)^n\sigma}$; or le produit des $\mathcal{E}_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ est $\mathcal{E}$, donc $\mathcal{E}$ est du type $F_{(\sigma\delta)^{n+1}}$. *Si nous avons* $n = 0$, à l'ensemble $(E^{**}E_k)$ correspond $(\mathcal{E}^{**}\mathcal{E}_k)$, où $\mathcal{E}_k$ est un ensemble du type F_σ, car au produit de $\mathcal{E}^{**}$ et d'un ensemble du type F (fermé) correspond le produit de $\mathcal{E}^{**}$ et d'un ensemble fermé; mais les produits des $(\mathcal{E}^{**}\mathcal{E}_k)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ est $\mathcal{E}$, donc $\mathcal{E}$ est du type $F_{\sigma\delta}$.

La démonstration pour les ensembles du type $F_{(\sigma\delta)^{n+1}\sigma}$ est immédiate.

Des raisonnements tout semblables démontrent la proposition pour les ensembles des types $G_{(\delta\sigma)^n}$ et $G_{(\delta\sigma)^n\delta}$.

On peut sans peine étendre les symboles de M. Hausdorff aux ensembles mesurables B des classes transfinies [1]. Pour ces symboles le théorème reste exact, la démonstration étant toute semblable.

3. *Application aux ensembles complémentaires des ensembles* $(\mathcal{A})$ [2]. — On sait, d'après les raisonnements élémentaires, qu'un ensemble homéomorphe à un ensemble $(\mathcal{A})$ est un ensemble $(\mathcal{A})$. D'après le corollaire du théorème fondamental nous déduisons : *tout ensemble homéomorphe à un ensemble complémentaire d'un ensemble* $(\mathcal{A})$ *est un ensemble de même nature* [3].

---

et $G_{(\delta\sigma)^n\sigma}$ (*Comptes rendus*, t. 171, 1920, p. 24). M. Mazurkiewicz l'a établi pour les ensembles du type $F_{\sigma\delta}$ (*Fund. Math.*, t. 2).

(1) Pour les symboles G cela a été fait par M. Sierpiński (*loc. cit.*, p. 24).

(2) On consultera pour la définition et les propriétés des ensembles $(\mathcal{A})$ les Notes de Souslin et M. N. Lusin (*Comptes rendus*, t. 164).

(3) Ce théorème a été démontré par M. Alexandroff (*Fund. Math.*, t. 5).