УДК 517.53/.57

А. В. Сычев

О СИБИРСКОЙ ШКОЛЕ ЛАВРЕНТЬЕВА – БЕЛИНСКОГО ПО ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ: ИСТОКИ, РАЗВИТИЕ, ДОСТИЖЕНИЯ

К 50-летию СО РАН

Дается обзор результатов сибирской школы по геометрической теории функций, возникшей на основе работ М. А. Лаврентьева и П. П. Белинского, за полувековой период ее существования.

Истоки этой школы восходят к работам 20–30-х годов прошлого столетия, в которых впервые возникло понятие квазиконформного отображения.

В 1928 г. Г. Греч [10] рассмотрел следующую задачу. Если Q — квадрат и R — прямоугольник, не являющийся квадратом, то не существует конформного отображения Q на R, переводящего вершины в вершины. Греч поставил вопрос о построении отображения Q на R, близкого к конформному. Для этого понадобилось ввести меру близости отображения к конформному, и , введя такую меру, Греч сделал первый шаг к рассмотрению квазиконформных отображений (хотя само название «квазиконформность» им не использовалось).

Однако это была лишь интересная идея, и о ней забыли на несколько лет. Работа Греча получила признание позже, когда квазиконформные отображения появились снова в 1935 г. в работе М. А. Лаврентьева [11] в связи с уравнениями в частных производных. Но у него уже был совсем иной подход. Со свойственной ему глубиной и широтой охвата фундаментальных и прикладных проблем математики и механики он увидел в теории квазиконформных отображений новый весьма эффективный путь решения ряда назревших задач динамики сплошных сред. В своей книге «...Прирастать будет Сибирью» [1] Михаил Алексеевич написал об этом так: «...теория конформных отображений уже не могла полностью удовлетворить потребности аэродинамики: скорости самолетов возросли, надо было учитывать сжимаемость воздуха и возможность превышения скорости звука, то есть, иметь дело с нелинейной системой уравнений в частных производных. Это привело к необходимости распространить теорию на более широкий круг объектов и вылилось в создание новой теории квазиконформных отображений».

Что же представляет собой класс квазиконформных отображений? Обратимся к одному из исходных определений.

Пусть $w = f(z)$, $z = x + iy$, $w = u + iv$ — гомеоморфизм плоской области D, принадлежащий классу C^1.

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2007. Т. 7, вып. 3. С. 3–12

Во всякой точке $z \in D$ он порождает отображение дифференциалов

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \\ dv &= \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy, \end{aligned} \tag{1}$$

которое можно также записать в комплексной форме:

$$dw = f_z dz + f_{\bar{z}} d\bar{z}, \tag{2}$$

где $f_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$, $f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ — формальные производные f по z и $\bar{z}$ соответственно.

Из (1) следует, что якобиан

$$J(z, f) = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2.$$

Рассматривая отображения, сохраняющие ориентацию, отсюда будем иметь $|f_{\bar{z}}| < |f_z|$.

Геометрически (1) представляет собой аффинное отображение плоскости (dx, dy) на плоскость (du, dv). Оно переводит круги с центром в начале координат в эллипсы.

Из (2) имеем

$$(|f_z| - |f_{\bar{z}}|)|dz| \leq |dw| \leq (|f_z| - |f_{\bar{z}}|)|dz|.$$

Отсюда следует, что отношение длины большей полуоси эллипса к длине меньшей полуоси равно

$$p\,(z) = \frac{|f_z| + |f_{\bar{z}}|}{|f_z| - |f_{\bar{z}}|}.$$

Отображение f называется **квазиконформным**, если величина $p\,(z)$ ограничена. Отображение f называется **q-квазиконформным**, $1 \leq q < \infty$, если $p(z) \leq q$. Очевидно, что 1-квазиконформное отображение является конформным.

Согласно этому определению в каждой точке $z \in D$ главная линейная часть отображения f преобразует круг с центром в z в эллипс, отношение $p\,(z)$ длины большей полуоси которого к длине меньшей полуоси ограничено постоянной q.

Тем самым $q(z)$ можно принять за количественную величину деформации среды около точки z: чем больше будет $q(z)$, тем сильнее деформируется среда. В дальнейшем $q(z)$ стали называть **коэффициентом квазиконформности по Лаврентьеву.**

Различные другие более поздние определения как плоских, так и пространственных квазиконформных отображений являются естественными обобщениями этого определения.

Работами [2, 3, 11], в которых были поставлены и решены общие основополагающие задачи теории плоских квазиконформных отображений, М. А. Лаврентьев построил фундамент нового плодотворного направления геометрической теории функций комплексного переменного, нашедшего в последующие десятилетия самые широкие приложения для решения различных классических задач динамики сплошных сред. В 1947 г. за эти труды он был удостоен Сталинской премии I степени.

В 1958 г. , вскоре после постановления Совета Министров СССР о создании Сибирского отделения АН, М. А. Лаврентьев с семьей и группой учеников переехал в бурно строившийся в то время Новосибирский академгородок. Среди них был и приглашенный Михаилом Алексеевичем талантливый молодой ученый из Львова Павел Петрович Белинский, получивший к тому времени ряд важных результатов в области плоских квазиконформных отображений. Свой первый научный результат «О существовании и единственности квазиконформных отображений» он доложил на заседании Московского математического общества в 1950 г. В дальнейшем им было дано решение целого ряда классических проблем этой теории, а его глубокие идеи и результаты послужили источником новых актуальных научных направлений.

Им решен вопрос о существовании и единственности плоских квазиконформных отображений с измеримыми характеристиками, о замыкании класса непрерывно дифференцируемых квазиконформных отображений и установлен критерий нормальности семейства таких отображений. П. П. Белинским исследованы также дифференциальные свойства плоских квазиконформных отображений, получены различные метрические оценки для таких отображений, в частности, для отображений, близких к конформным.

Крупным результатом исследований П. П. Белинского явился разработанный им вариационный метод решения экстремальных задач для квазиконформных отображений. Указанный метод позволяет явно выписывать отображения, близкие к конформным, для различных канонических областей и с помощью этого проводить исследование экстремальных функций. Этим методом были решены наиболее общие экстремальные задачи теории плоских квазиконформных отображений.

П. П. Белинскому принадлежит также идея измерять величину деформации не максимальным коэффициентом квазиконформности, а некоторым его усредненным значением по всей деформируемой области. Эта характеристика представлялась более пригодной для приложений, так как являлась математическим аналогом суммарной энергии, затраченной на выполнение той или иной деформации. Возник целый ряд новых интересных задач, а некоторые из старых проблем (например, проблема устойчивости) получили новое освещение в связи с предложенной трактовкой квазиконформности. Отображения, у которых эта усредненная характеристика ограничена, стали называться **квазиконформными в среднем**, а затем и **квазиконформными по Белинскому**. Глубокие результаты для этого класса отображений были получены самим П. П. Белинским. В частности, он решил поставленную в 1938 г. О. Тейхмюллером известную проблему о почти конформных отображениях, привлекавшую многих специалистов важностью ее приложений в теории граничных задач аналитических и мероморфных функций.

Рубежным итогом этих фундаментальных исследований П. П. Белинского в области плоских квазиконформных отображений стала его монография «Общие свойства квазиконформных отображений», изданная в 1974 г. [7].

Таким образом, работами Лаврентьева – Белинского 30–50-х годов были заложены основы теории плоских квазиконформных отображений, послужившей источником новых идей и направлений исследования в области геометрической теории функций.

Огромный интерес к квазиконформным отображениям на плоскости был вызван открывшейся перспективой использования их для решения различных задач гидродинамики, газовой динамики, электростатики и других областей механики сплошных сред. Ведущая роль в организации исследований в этом направлении принадлежала Институту гидродинамики СО РАН, который в те годы возглавлял М. А. Лаврентьев. И здесь наряду с работами самого Михаила Алексеевича, среди которых особо выделим его монографию [4], следует отметить значительные успехи по применению квазиконформных отображений к решению краевых задач школы В. Н. Монахова.

Другим центром, в котором сосредоточились фундаментальные исследования в этой области геометрической теории функций под руководством П. П. Белинского, стал Институт математики СО РАН. Его учениками были получены существенные продвижения в развитии теории квазиконформных, квазиконформных в среднем и других смежных с ними классов плоских отображений. Дальнейшее развитие в работах С. Л. Крушкаля, П. А. Билуты, И. А. Волынца, В. Э. Гейнемана получил вариационный метод П. П. Белинского, что позволило им решить ряд новых важных экстремальных задач.

Обнаружились глубокие связи теории квазиконформных отображений с теорией функций многих комплексных переменных, топологией, теорией клейновых групп, теорией дифференцируемых многообразий, теорией эллиптических систем дифференциальных уравнений первого порядка, теорией фредгольмовых собственных значений, математической физикой, что открыло пути к новым приложениям этой теории для решения некоторых стоящих там проблем. С другой стороны, выявившиеся связи привели к постановке новых проблем и для самих квазиконформных отображений. Ведущая роль в этих исследованиях принадлежала С. Л. Крушкалю (отметим хотя бы его монографию [8]), весомый вклад внесен также работами В. В. Чуешева, Б. Н. Апанасова, А. В. Тетенова, Н. А. Гусевского и др.

Квазиконформные отображения в пространстве были рассмотрены впервые М. А. Лаврентьевым в 1938 г. [5]. В этой же работе было отмечено качественное отличие пространственного случая от плоского: трудности в исследовании пространственных квазиконформных отображений связаны с тем, что в системе уравнений в частных производных, определяющей свойство квазиконформности отображения, с ростом размерности пространства непропорционально быстро растет число соотношений. При $n = 2$ такая система всегда разрешима, а при $n \geq 3$ переопределена. Вследствие этого класс конформных отображений в пространстве оказался чрезвычайно беден. Все они, согласно известной теореме Лиувилля, исчерпываются преобразованиями Мебиуса, т. е. суперпозициями инверсий относительно сфер или плоскостей. В связи с этим, с одной стороны, интерес к классу пространственных квазиконформных отображений, как к достаточно широкому по сравнению с конформными классу отображений, возрос, с другой — их исследование уже не могло опереться на испытанный аппарат теории аналитических функций и конформных отображений. Поэтому появилась необходимость создания новых методов, в какой-то мере заменяющих аппарат конформных отображений. Таким методом оказался **метод модулей** семейств кривых и поверхностей. Метод модулей был известен давно (работы Греча, Фюгледе) и применялся в решении задач на плоскости, но в теории плоских отображений он не играл ведущей роли, уступая по значимости другим методам комплексного анализа. В 60-х годах метод модулей попытались применить к изучению пространственных отображений и получили столь перспективные результаты, что весь период 60–80-х годов был отмечен настоящим взрывом исследовательской активности в области пространственных квазиконформных отображений. Появилось огромное количество публикаций по этой тематике, были получены фундаментальные результаты, найдены новые приложения в других областях математики. И уже к 70-м годам можно было твердо сказать, что теория пространственных квазиконформных отображений в основном сложилась.

В чем суть этого метода? Метод модулей можно описать в различных терминах и понятиях, в зависимости от характера конкретных задач, для решения которых он используется. И одна из разновидностей метода модулей – это использование **конформной емкости конденсаторов**.

Конденсатор можно представить себе как некоторую часть пространства — поле конденсатора, в которой расположены два континуума — пластины конденсатора. Каждый конденсатор имеет емкость, которая зависит от формы его поля, пластин и от их взаимного расположения. Если такой конденсатор поместить в деформируемую среду, то его форма деформируется вместе со средой и после деформации этот конденсатор будет иметь уже другую емкость. Поэтому конденсаторы, помещаемые в деформируемую среду, можно использовать в качестве измерительного инструмента, регистрирующего наличие деформации. При этом коэффициент изменения емкости конденсатора в результате деформации и служит для измерения величины этой деформации. В случае конформного преобразования емкость любого конденсатора, помещенного в среду, не изменится, хотя форма конденсатора может изменяться вместе со средой. Поэтому емкость конденсатора реагирует только на нарушение конформности, и, следовательно, конденсаторы можно использовать для измерения или оценки величины квазиконформности.

В 60-х годах к изучению метода модулей и его приложений к квазиконформным отображениям меня привлек мой учитель П. П. Белинский. Совершенствовав технику вычисления модулей семейств кривых и поверхностей, мне удалось выполнить ряд сложных расчетов конкретных конденсаторов, играющих важную роль в решении экстремальных задач. Благодаря этому удалось дать уточненное описание искажения расстояний, которое происходит при квазиконформных отображениях, и решить ряд экстремальных задач. Большая часть этих результатов была включена в изданную в 1983 г. мою монографию [9].

Начиная с 70-х годов к этим исследованиям подключилась группа учеников, среди которых были В. В. Асеев, Ю. Ф. Стругов, В. С. Кудьявин, Ю. Ф. Субоч, А. Н. Малютина, А. К. Варисов, Л. С. Ким, Н. М. Жабборов, Б. Ю. Султанов и др. Эта совместная работа привела к дальнейшему прогрессу в развитии метода модулей и теории пространственных квазиконформных отображений.

Особый интерес в теории пространственных квазиконформных отображений вызывала задача **о коэффициенте квазиконформности пары областей**, впервые поставленная в работах американского математика Геринга и финского математика Вяйсяля в 1965 г. В чем суть этой проблемы?

Согласно теореме Римана любые две плоские области без дырок можно продеформировать друг в друга конформным отображением. В пространстве такой возможности в общем случае нет. Поэтому возникает вопрос о существовании уже не конформного, а квазиконформного отображения одной пространственной области на другую. И если пара областей может быть квазиконформно деформирована друг в друга, то возникает следующий вопрос: а с каким наименьшим коэффициентом квазиконформности это можно сделать? Для некоторых пар пространственных областей такая наиболее экономная квазиконформная деформация была вычислена сравнительно просто. Но для других случаев эта проблема представляла большие трудности и решение оставалось неизвестным.

Одной из них была задача о вычислении минимального коэффициента квазиконформности пары пространственных клинов и пары конусов. В 1978 г. эта проблема была решена мной для случая двух выпуклых клинов, причем было доказано, что наиболее экономная (т. е. экстремальная) деформация представляет собой развертку клина относительно его оси. Спустя несколько лет В. В. Асееву удалось полностью изучить случай отображения выпуклого клина на невыпуклый. При этом обнаружился ряд неожиданных эффектов, как то: существование квазиконформных деформаций более экономных, чем разворачивание относительно оси, и отсутствие экстремального отображения. Аналогичную задачу для отображений выпуклого конуса на невыпуклый решил в 1995 г. мой ученик К. А. Голованов.

В 1974 г. в моем соавторстве с В. В. Асеевым была полностью решена проблема об устранимых особенностях для квазиконформных отображений. Множества этого типа, называемые NED-множествами, представляют собой такие вкрапления диэлектрика в среду, которые не оказывают влияния на емкость любого конденсатора. Иначе говоря, поле конденсатора как бы не замечает этих вкраплений. В упомянутой работе было доказано, что такие вкрапления могут быть устранены при любой квазиконформной деформации пространственной среды.

Эти исследования получили дальнейшее развитие благодаря замечательным результатам В. А. Шлыка, работавшего в тесном научном контакте с новосибирской школой. Он изучил и описал ряд тонких свойств NED-множеств и дал исчерпывающее описание более сложного типа множеств, которые устранимы не абсолютно, а только вдоль заданного направления в пространстве. В этой же области продолжили исследования ученики В. А. Шлыка — Ю. В. Дымченко, И. Н. Демшин и др. Изучением устранимых множеств, расположенных на границе деформируемой области в пространстве, успешно занимался также мой ученик Л. С. Ким.

70–90-е годы были отмечены бурным развитием и теории пространственных квазиконформных в среднем отображений. В исследование этого класса отображений активно включились мои ученики Ю. Ф. Стругов, В. С. Кудьявин, Ю. К. Чернов, А. Н. Малютина, а также работающий в постоянном творческом контакте с нашей школой В. И. Кругликов.

Изучение квазиконформности в среднем в пространстве потребовало использования мощного современного математического аппарата из многих разделов математики. Это и методы нелинейного функционального анализа, искусное владение которыми позволило Ю. Ф. Стругову не только справиться с решением внутренних задач квазиконформности в среднем, но и получить решение ряда проблем нелинейного функционального анализа. Это и геометрические методы, использующие тонкую технику теории меры, которыми отличаются работы В. И. Кругликова и его учеников — В. И. Пайкова и С. М. Борчук.

Основные результаты, полученные В. И. Кругликовым, относятся к исчерпывающему описанию поведения квазиконформных в среднем отображений на границе деформируемой области. В этих исследованиях нашла применение общая теория граничных элементов, так называемых **простых концов**, разработанная в 70–80-х годах донецкой школой Г. Д. Суворова. В теории отображений с ограниченным интегралом Дирихле и квазиконформных отображений крупные результаты по поведению на границе деформируемой пространственой области были получены Б. П. Куфаревым и его учениками.

А. Н. Малютиной удалось пролить свет на поведение таких отображений, квазиконформных в среднем, которые могут накладывать деформируемую область на себя и образовывать слои — это так называемые неоднолистные деформации, при которых различные части пространства совмещаются в одном объеме.

М. А. Лаврентьевым и П. П. Белинским был поставлен ряд крупных проблем теории квазиконформных отображений. Некоторые из них содержатся в их совместной публикации [6]. Одна часть этих проблем решена, другая еще ждет своего решения. Например, решена проблема Лаврентьева о том, что локально q–квазиконформное отображение пространства является глобальным гомеоморфизмом (В. А. Зорич). Решена проблема Лаврентьева, связанная с теоремой Лиувилля: q–квазиконформный образ шара при малой величине $q-1$ должен быть близок к шару (М. А. Лаврентьев, П. П. Белинский, Ю. Г. Решетняк), частично (для квазиконформных автоморфизмов трехмерного шара) решена проблема Лаврентьева – Белинского: можно ли произвольное пространственное q–квазиконформное отображение представить в виде суперпозиции отображений, сколь угодно близких к конформным, или в виде непрерывной деформации из тождественного так, чтобы близкие по параметру отображения отличались друг от друга на отображение, близкое к конформному? (В. А. Селезнев).

Остановлюсь подробнее на проблемах Белинского, решение которых неожиданно привело к принципиально новому направлению исследований.

В классических постановках исследовательских задач в качестве деформируемой среды рассматривалось либо все пространство, либо такая его часть, в которой каждая точка обладала пространственной окрестностью. Это позволяло применять методы, использующие дифференциальное исчисление и теоремы математического анализа. Однако во многих ситуациях, встречающихся в реальной практике, исследуемый деформируемый объект не обладает такой хорошей и удобной структурой. Строение деформируемой среды может быть настолько сложным, что описание происходящих в ней процессов на привычном языке дифференциальных уравнений становится принципиально невозможным. Наиболее естественная ситуация такого рода возникает при рассмотрении процессов, происходящих на континуумах, погруженных в пространство, но не обладающих гладкой структурой (как, например, металлическая пленка, сильно изъеденная коррозией).

П. П. Белинский обратил внимание на то, что и в этих ситуациях мы можем использовать емкости конденсаторов в качестве прибора, регистрирующего и измеряющего деформацию. При этом полем конденсатора служит все пространство, а пластины его расположены на деформируемом континууме и деформируются вместе с ним, что и приводит к изменению емкости. Оригинальность этого подхода к описанию деформации сложных континуумов состоит в его простоте и естественности. До П. П. Белинского были попытки использовать конденсаторы для измерения деформации на континуумах, но при этом поле конденсатора пытались «втиснуть» в сам деформируемый объект, что заводило в тупик из-за невозможности разумного определения емкости на нерегулярных континуумах. П. П. Белинский предложил вычислять емкость поля конденсатора в обычном пространстве, но следить за ее изменением при деформации пластин на континууме. Деформации континуумов, при которых существует оценка для искажения емкостей всех таких конденсаторов, были названы ОИМ-гомеоморфизмами.

Изучением таких деформаций (ОИМ-гомеоморфизмов) занялся вначале А. К. Варисов — аспирант П. П. Белинского, а потом к этим исследованиям подключился и В. В. Асеев. Основные его усилия были направлены на решение двух фундаментальных проблем Белинского. Первая из них — это гипотеза о том, что если при деформации континуума емкости всех конденсаторов с пластинами на нем сохраняют свое значение (т. е. деформация не регистрируется нашими «измерительными приборами»), то такая деформация является конформным преобразованием всего пространства (т. е. мебиусовым преобразованием) — и ничем иным быть не может. В 1990 г. (уже после кончины Белинского) В. В. Асеев получил полное решение этой проблемы на плоскости, а в 2000 г. получил ее решение в пространстве в том случае, когда деформируемый континуум имеет хотя бы четыре «хорошие» точки. Полное решение этой проблемы в пространстве остается пока неизвестным. Вторая проблема Белинского — это гипотеза о том, что при наличии какой-нибудь оценки для искажения емкостей конденсаторов обязательно существует и линейная оценка искажения. Эта проблема пока исследована лишь в очень частных ситуациях на плоскости, и ее изучение продолжается в работах В. В. Асеева и его учеников. В частности, очень важным моментом на пути решения задачи о линейной оценке искажения является тщательное и трудоемкое изучение конденсаторов с большой емкостью.

Основным итогом первоначальных исследований проблем Белинского было открытие В. В. Асеевым в 1984–1985-х годах того замечательного явления, что условие ограниченного искажения емкостей конденсаторов при деформации произвольного континуума, находящегося в евклидовом пространстве, оказалось эквивалентным другому, более простому условию ограниченности искажения отношения расстояний между точками этого континуума. Суть этого нового подхода заключается в том, что в качестве измерительных приборов, регистрирующих деформацию среды, берутся упорядоченные четверки точек (так называемые **тетрады**), а в качестве числовой характеристики рассматривается двойное отношение взаимных расстояний между этими четырьмя точками. Если теперь «забыть» о конденсаторах и с самого начала рассматривать только тетрады и искажение их характеристики, то нам не нужно предполагать, что деформируемая среда находится в евклидовом пространстве. В. В. Асеевым было доказано, что при этом мы не потеряем то, что имели раньше. Но при таком подходе становится излишним требование континуальности среды, так же, как и наличие объемлющего ее хорошего пространства. Единственное, что должно присутствовать в исследуемой деформируемой среде — это понятие расстояния между точками. Другими словами, среда должна быть метрическим пространством, наделенным понятием расстояния.

Деформации метрических пространств, ограниченно искажающие двойное отношение четверок точек, были названы В. В. Асеевым **квазимебиусовыми** отображениями. К тому же классу отображений независимо пришли в 1985 г. и финские математики из исследовательской группы Вяйсяля.

Этот отказ от несущественных ограничений, т. е. «очистка» сущности явления от случайности его формы, открыл совершенно новые возможности как в постановке исследовательских задач, так и в разработке новых технологий решения старых, классических проблем. При этом особый интерес начали представлять метрические пространства, обладающие свойством самоподобия — это широкий класс множеств, известных как **самоподобные фракталы**, имеющие в общем случае дробную (нецелую) размерность. Именно такие деформации, при которых ограниченно искажаются не сами расстояния, а их отношения, и оказались наиболее естественными и полезными при изучении таких фрактальных объектов. Например, ученик В. В. Асеева А. А. Шалагинов успешно исследовал группу движений вдоль кривой Коха, на которой нет понятия длины пройденного пути и не имеет смысла понятие скорости. Но движение, вполне приемлемое с точки зрения механики, тем не менее, возможно. Изучением геометрических свойств фрактальных сред и их квазиконформных деформаций занимаются в настоящее время ученики В. В. Асеева Д. Г. Кузин и А. С. Кравченко. Исследование геометрических свойств фракталов, порожденных конформными преобразованиями пространства, успешно проводит в Горно-Алтайском госуниверситете А. В. Тетенов. А ученик В. Н. Монахова В. А. Селезнев руководит исследованиями по проблемам механики деформируемой фрактальной среды, возглавляя группу молодых ученых в Новосибирском техническом университете.

Заканчивая обзор результатов школы Лаврентьева – Белинского, можно заключить, что круг изучаемых ею проблем постоянно расширяется, а методы исследования совершенствуются. Развитая ею теория представляет собой далеко продвинутый раздел геометрической теории функций, имеющий самые различные приложения как в самой математике, так и в механике. Поскольку зарождение школы совпадает по времени с основанием Сибирского отделения РАН, то в 2007 г. она вместе с Отделением отмечает свой полувековой юбилей. И если вначале она замыкалась лишь в рамках Новосибирского научного центра, то теперь ее география существенно расширилась и включает в себя города Омск, Тюмень, Томск, Барнаул, Горно-Алтайск, Кемерово, Владивосток и др.

К сожалению, сегодня, как и вся наука, школа переживает далеко не лучшие времена. Вследствие нищенского финансирования молодежь идет в науку крайне неохотно и тем самым лаврентьевская формула «нет ученого без учеников» в корне подорвана. Будем верить, что эта черная полоса канет в небытие, и настанет время нового расцвета российской и, в частности, сибирской науки.

Список литературы

1. *Лаврентьев М. А.* ...Прирастать будет Сибирью. М.: Молодая гвардия, 1980.

2. *Лаврентьев М. А.* Общая задача теории квазиконформных отображений плоских областей // Мат. сб. 1947. № 21(63). С. 285–320.

3. *Лаврентьев М. А.* Основная теорема теории квазиконформных отображений плоских областей // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1948. № 12. С. 513–554.

4. *Лаврентьев М. А.* Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа. М.: Изд-во АН СССР, 1962.

5. *Лаврентьев М. А.* Об одном дифференциальном признаке гомеоморфных отображений трехмерных областей // ДАН СССР. 1938. Т. 20, № 4. С. 241–242.

6. *Лаврентьев М. А., Белинский П. П.* Некоторые проблемы геометрической теории функций // Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1972. № 128. С. 34–40.

7. *Белинский П. П.* Общие свойства квазиконформных отображений. Новосибирск: Наука, 1974.

8. *Крушкаль С. Л.* Квазиконформные отображения и римановы поверхности. Новосибирск: Наука. 1975.

9. *Сычев А. В.* Модули и пространственные квазиконформные отображения. Новосибирск: Наука. 1983.

10. *Grötsch H.* Über die Verzerrung bei Schlichten nichtkonformen Abbildungen und über eine damit zusammenhängende Erweiterung des Picardschen Satzes // Ber. Verh. Sächs. Acad. Wiss. Leipzig. 1928. Bd. 80. P. 503–507.

11. *Лаврентьев М. А.* Sur une classe de representation continues // Мат. сб. 1935. № 42. С. 407–242.

Материал поступил в редколлегию 25.05.2007

Адрес автора

СЫЧЁВ Анатолий Викторович
РОССИЯ, 630090, г. Новосибирск, 90
пр. Акад. Коптюга, 4
Институт математики СО РАН
e-mail: btp@math.nsc.r
Тел.: (383) 3333-171