

ГЛАВА ШЕСТАЯ

ВЛИЯНИЕ СИЛ СОПРОТИВЛЕНИЯ

§ 26. Преобразование уравнений Буссинеска

В предыдущих главах было рассмотрено распространение длинных волн в каналах в предположении, что русло призматическое и что влиянием сил сопротивления на неустановившееся движение можно пренебречь. Изучение неустановившегося движения при этих упрощающих допущениях произвести гораздо легче, чем в общем случае. Однако общий характер движения будет тем же и при учете сил сопротивления и непризматичности русла. Остается только дать методы решения тех же задач, которые были решены в предположении отсутствия сил трения и непризматичности русла, в общем случае, а также дать приближенный метод, который позволял бы быстро и с достаточной точностью производить расчеты.

Таким методом является метод Massau [25]. Обоснование его содержится в замечательных исследованиях Леви [16, 17]. Этот метод был применен Ф. И. Франклем [30] для решения ряда задач газовой динамики. В дальнейшем при изложении мы ограничимся рассмотрением призматического русла, хотя учет непризматичности лишь немного усложняет расчет.

Прежде чем перейти к решению различных краевых задач для уравнений Буссинеска

$$\left. \begin{aligned} i_0 - \frac{U^2}{C^2 R} - \frac{1}{B} \frac{\partial F}{\partial s} &= \frac{U}{g} \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t}, \\ \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial(UF)}{\partial s} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

займемся сначала их общим исследованием.

Эти уравнения в общем случае не могут быть приведены к линейным уравнениям путем замены переменных (§ 7), при которой остаются инвариантными характеристики этих уравнений.

Это следует из того, что уравнения характеристик

$$\left. \begin{aligned} ds &= \left(U + \sqrt{\frac{gF}{B}} \right) dt, \\ dU + \sqrt{\frac{g}{FB}} dF &= g \left(i_0 - \frac{U^2}{C^2 R} \right) dt, \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

$$\left. \begin{aligned} ds &= \left(U - \sqrt{\frac{gF}{B}} \right) dt, \\ dU - \sqrt{\frac{g}{FB}} dF &= g \left(i_0 - \frac{U^2}{C^2 R} \right) dt \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

в общем случае не обладают интегрируемыми комбинациями.¹

Предположим противное. Допустим, что такое преобразование существует. Пусть α и β будут теми независимыми переменными, при которых уравнения (1.15) становятся линейными уравнениями, отнесенными к своим характеристикам. Тогда

$$\varphi_1(t, s, U, F) = \alpha = \text{const}$$

и

$$\varphi_2(t, s, U, F) = \beta = \text{const}$$

будут при произвольных постоянных значениях α и β удовлетворять соответственно системам (2.29) и (2.30). Эти последние, в противоречие с нашим предположением, обладали бы таким образом интегрируемыми комбинациями.

Займемся теперь преобразованием уравнений (1.15). Допустим, что

$$\left. \begin{aligned} U &= U(t, s), \\ F &= F(t, s) \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

есть решение этих уравнений. Подставим это решение в уравнения характеристик (2.29) и (2.30).

Каждые из двух уравнений (2.29) или (2.30) окажутся тогда в силу теоремы I (§ 7) следствиями друг друга, и мы получим для определения характеристик, принадлежащих решению (6.1), два независимых уравнения

$$\left. \begin{aligned} ds &= \left(U + \sqrt{\frac{gF}{B}} \right) dt, \\ ds &= \left(U - \sqrt{\frac{gF}{B}} \right) dt, \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

где U , F и B представляют собой известные функции от t и s . Интегрирование этих уравнений дает сетку характеристик, отвечающих решению (6.1). Пусть

$$\left. \begin{aligned} \alpha(t, s) &= \alpha, \\ \beta(t, s) &= \beta \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

представляют собой общие интегралы этих уравнений. Линии $\alpha = \text{const}$ и $\beta = \text{const}$ будут тогда характеристиками. Нанесем в плоскости ts эти линии и примем за новые независимые переменные α и β . Формулы преобразования,

¹ Мы не будем производить здесь исследование, которое показывает, что уравнения характеристик (2.29) и (2.30) в общем случае не обладают интегрируемыми комбинациями. Желающих ознакомиться с методом определения интегрируемых комбинаций у уравнений характеристик и с условиями, гарантирующими отсутствие таковых, отсылаем к [9] (т. III, ч. 1, гл. XXIV, § 475).

аналогичные формулам (3.8), будут:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial t} &= \frac{1}{D} \frac{\partial s}{\partial \beta}, & \frac{\partial \beta}{\partial t} &= -\frac{1}{D} \frac{\partial s}{\partial \alpha}, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial s} &= -\frac{1}{D} \frac{\partial t}{\partial \beta}, & \frac{\partial \beta}{\partial s} &= \frac{1}{D} \frac{\partial t}{\partial \alpha}, \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

где

$$D = \frac{\partial t}{\partial \alpha} \frac{\partial s}{\partial \beta} - \frac{\partial t}{\partial \beta} \frac{\partial s}{\partial \alpha}. \quad (6.5)$$

Предположим, что преобразование (6.3) взаимно однозначно. Тогда, решая уравнения (6.3) относительно t и s , имеем:

$$\begin{aligned} t &= t(\alpha, \beta), \\ s &= s(\alpha, \beta), \end{aligned}$$

и решение (6.1) можно представить в виде:

$$\left. \begin{aligned} t &= t(\alpha, \beta), \\ s &= s(\alpha, \beta), \\ U &= U(\alpha, \beta), \\ F &= F(\alpha, \beta). \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

Вдоль линий $\alpha = \text{const}$

$$dt = \frac{\partial t}{\partial \beta} d\beta,$$

$$ds = \frac{\partial s}{\partial \beta} d\beta,$$

а вдоль линий $\beta = \text{const}$

$$dt = \frac{\partial t}{\partial \alpha} d\alpha,$$

$$ds = \frac{\partial s}{\partial \alpha} d\alpha;$$

подставляя эти выражения в уравнения (6.2), получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial \beta} &= \left(U + \sqrt{\frac{gF}{B}} \right) \frac{\partial t}{\partial \beta}, \\ \frac{\partial s}{\partial \alpha} &= \left(U - \sqrt{\frac{gF}{B}} \right) \frac{\partial t}{\partial \alpha}, \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

а заменяя в (6.5) $\frac{\partial s}{\partial \alpha}$ и $\frac{\partial s}{\partial \beta}$ их значениями из (6.7), получим:

$$D = 2 \sqrt{\frac{gF}{B}} \frac{\partial t}{\partial \alpha} \frac{\partial t}{\partial \beta}. \quad (6.8)$$

Преобразуем теперь уравнения (1.15), принимая за независимые переменные α и β .

Для производных имеем:

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial F}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial s}$$

и аналогичные выражения — для остальных производных. Пользуясь (6.4), получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial s} &= \left(\frac{\partial t}{\partial \alpha} \frac{\partial F}{\partial \beta} - \frac{\partial t}{\partial \beta} \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right) \frac{1}{D}, \\ \frac{\partial U}{\partial s} &= \left(\frac{\partial t}{\partial \alpha} \frac{\partial U}{\partial \beta} - \frac{\partial t}{\partial \beta} \frac{\partial U}{\partial \alpha} \right) \frac{1}{D}, \\ \frac{\partial F}{\partial t} &= \left(\frac{\partial s}{\partial \beta} \frac{\partial F}{\partial \alpha} - \frac{\partial s}{\partial \alpha} \frac{\partial F}{\partial \beta} \right) \frac{1}{D}, \\ \frac{\partial U}{\partial t} &= \left(\frac{\partial s}{\partial \beta} \frac{\partial U}{\partial \alpha} - \frac{\partial s}{\partial \alpha} \frac{\partial U}{\partial \beta} \right) \frac{1}{D}. \end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

Подставляя эти выражения в уравнения (1.15) и пользуясь (6.7), получим:

$$\begin{aligned} \left(i_0 - \frac{U^2}{C^2 R} \right) 2g \frac{\partial t}{\partial \alpha} \frac{\partial t}{\partial \beta} - \sqrt{\frac{g}{BF}} \frac{\partial t}{\partial \alpha} \frac{\partial F}{\partial \beta} + \sqrt{\frac{g}{BF}} \frac{\partial t}{\partial \beta} \frac{\partial F}{\partial \alpha} - \frac{\partial t}{\partial \alpha} \frac{\partial U}{\partial \beta} - \frac{\partial t}{\partial \beta} \frac{\partial U}{\partial \alpha} &= 0, \\ \sqrt{\frac{g}{BF}} \frac{\partial t}{\partial \alpha} \frac{\partial F}{\partial \beta} + \sqrt{\frac{g}{BF}} \frac{\partial t}{\partial \beta} \frac{\partial F}{\partial \alpha} + \frac{\partial t}{\partial \alpha} \frac{\partial U}{\partial \beta} - \frac{\partial t}{\partial \beta} \frac{\partial U}{\partial \alpha} &= 0 \end{aligned}$$

или окончательно:

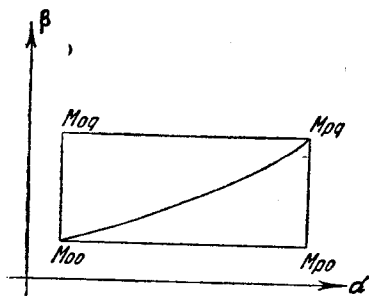
$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \alpha} - \sqrt{\frac{g}{BF}} \frac{\partial F}{\partial \alpha} &= g \left(i_0 - \frac{U^2}{C^2 R} \right) \frac{\partial t}{\partial \alpha}, \\ \frac{\partial U}{\partial \beta} + \sqrt{\frac{g}{BF}} \frac{\partial F}{\partial \beta} &= g \left(i_0 - \frac{U^2}{C^2 R} \right) \frac{\partial t}{\partial \beta}. \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

Систему четырех уравнений (6.7) и (6.10) назовем канонической системой уравнений.

Сравнивая эту систему с уравнениями характеристик (2.29) и (2.30), замечаем, что каноническая система уравнений совпадает с уравнениями характеристик. При отсутствии сил сопротивления уравнения (6.10) интегрируются в конечном виде, и каноническая система уравнений сводится к системе уравнений (6.7). Относительно решений систем (6.7) и (6.10) можно установить некоторые теоремы аналогично теоремам, приведенным в § 11.

Будем называть решением системы уравнений (6.7) и (6.10) ограниченные функции

$$\left. \begin{aligned} t &= t(\alpha, \beta), \\ s &= s(\alpha, \beta), \\ U &= U(\alpha, \beta), \\ F &= F(\alpha, \beta), \end{aligned} \right\} \quad (6.11)$$



Фиг. 63.

удовлетворяющие этим уравнениям, определенные в области, имеющей вид криволинейного треугольника, изображенного на фиг. 63 (в предельном случае это может быть область прямоугольника $M_{00}M_{p0}M_{pq}M_{0q}$), и имеющие в этой области непрерывные и ограниченные частные производные первого порядка.

Неустановившееся движение, отвечающее решению (6.11), будем называть волной.

Теорема VIII. *Необходимым и достаточным условием, определяющим разрушение волны, соответствующей какому-нибудь решению уравнений (6.7) и (6.10), является равенство нулю определителя D .*

Доказательство необходимости этого условия, если принять во внимание ограниченность производных от (6.11), непосредственно вытекает из формул (6.9).

Рассмотрим теперь линию $\beta = \lambda(\alpha)$ в плоскости $\alpha\beta$, вдоль которой определитель D обращается в нуль. Если вдоль этой линии $\frac{D(U, F)}{D(\alpha, \beta)} \neq 0$, то эта линия отвечает разрушению волны.

Действительно:

$$\frac{D(U, F)}{D(t, s)} = \frac{D(U, F)}{D(\alpha, \beta)} \frac{1}{D},$$

откуда непосредственно следует это утверждение. Рассмотрим теперь случай, когда определитель $\frac{D(U, F)}{D(\alpha, \beta)}$ равен нулю.

Преобразуем формулы (6.9), пользуясь (6.7) и (6.8). Получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial s} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{B}{gF}} \left(\frac{\partial F}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial t} - \frac{\partial F}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right), \\ \frac{\partial U}{\partial s} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{B}{gF}} \left(\frac{\partial U}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right), \\ \frac{\partial F}{\partial t} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{B}{gF}} \left[\frac{\partial F}{\partial \alpha} \left(U + \sqrt{\frac{gF}{B}} \right) - \frac{\partial F}{\partial \beta} \left(U - \sqrt{\frac{gF}{B}} \right) \right], \\ \frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{B}{gF}} \left[\frac{\partial U}{\partial \alpha} \left(U + \sqrt{\frac{gF}{B}} \right) - \frac{\partial U}{\partial \beta} \left(U - \sqrt{\frac{gF}{B}} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (6.12)$$

Допустим теперь для определенности, что равенство нулю определителя D вдоль рассматриваемой линии соответствует условию $\frac{\partial t}{\partial \alpha} = 0$. Тогда из (6.12) и (6.7) следует, что, если рассматриваемая линия не отвечает разрушению волны, то вдоль нее

$$\frac{\partial t}{\partial \alpha} = \frac{\partial U}{\partial \alpha} = \frac{\partial F}{\partial \alpha} = \frac{\partial s}{\partial \alpha} = 0.$$

В следующем параграфе мы покажем, что уравнения (1.15) не имеют решений, для которых вдоль линии $\beta = \lambda(\alpha)$

$$\frac{\partial t}{\partial \alpha} = \frac{\partial s}{\partial \alpha} = \frac{\partial U}{\partial \alpha} = \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0.$$

Это справедливо и в том случае, когда линия $\beta = \lambda(\alpha)$ совпадает с одной из характеристик $\beta = \text{const}$ или $\alpha = \text{const}$. Этим будет доказано, что обращение в нуль определителя D всегда соответствует разрушению волны.

Теорема IX. *Если явление разрушения волны не имеет места, т. е. если определитель D отличен от нуля, то функции*

$$\alpha = \alpha(t, s),$$

$$\beta = \beta(t, s),$$

обратные по отношению к функциям

$$t = t(\alpha, \beta),$$

$$s = s(\alpha, \beta),$$

однозначны.

Доказательство этой теоремы совершенно тождественно с доказательством теоремы IV (§ 11). Для доказательства этой теоремы для бурных потоков нужно так же, как при доказательстве теоремы IV, воспользоваться координатами Лагранжа.

Из теоремы IX следует, что каждому решению (6.11) системы уравнений (6.7) и (6.10) соответствует вплоть до момента разрушения волны возможное неустановившееся движение жидкости в канале. Решение (6.11) определяет в каждый момент времени в каждом сечении канала среднюю скорость и глубину.

§ 27. Краевые задачи для уравнений Буссинеска

В гл. гл. 3 и 4 были даны решения ряда задач на определение неустановившихся движений путем интегрирования уравнений Буссинеска при отсутствии сил сопротивления. Мы дадим теперь решения тех же задач путем интегрирования уравнений Буссинеска в общем виде, т. е. при учете влияния сил сопротивления.

Впервые решение задачи Коши для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка гиперболического типа с двумя независимыми переменными было дано Н. Леви [16]. При построении решения Леви пользовался методом конечных разностей. Франкль и Алексеева [31] распространили метод Леви на другие краевые задачи, в частности ими решены задачи об определении интеграла по данным его значениям на двух характеристиках различных семейств (§ 12), смешанная задача (§ 16) и обобщенная смешанная задача (§ 23).

Мы получим решение различных задач для уравнений Буссинеска путем приведения решения этих задач к решению системы нелинейных интегральных уравнений Вольтерра. Эти последние уравнения при выполнении некоторых весьма общих условий, как известно, допускают решение методом последовательных приближений, причем полученное решение единственно. При помощи этого метода различные краевые задачи решаются совершенно единообразным путем. Для составления интегральных уравнений необходимо только знать решение соответствующей краевой задачи для линейного уравнения гиперболического типа. Приводимый метод доказывает существование решения и его единственность, но, конечно, неудобен для расчетов.

В следующем параграфе будет дан метод приближенного решения тех же задач. Этот метод аналогичен приближенному методу, изложенному в гл. 5.

Ограничимся при решении случае призматического русла. Случай непризматического русла может быть рассмотрен совершенно аналогичным путем. Обозначая,

как и выше,

$$\begin{aligned} U + \lambda(F) &= \xi, \\ U - \lambda(F) &= \eta, \\ W &= U + \sqrt{\frac{gF}{B}}, \\ \Omega &= U - \sqrt{\frac{gF}{B}}, \end{aligned}$$

можно переписать каноническую систему уравнений (6.7) и (6.10) в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial \beta} &= W \frac{\partial t}{\partial \beta}, \\ \frac{\partial s}{\partial \alpha} &= \Omega \frac{\partial t}{\partial \alpha}, \\ \frac{\partial \xi}{\partial \beta} &= \varphi(\xi, \eta) \frac{\partial t}{\partial \beta}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} &= \varphi(\xi, \eta) \frac{\partial t}{\partial \alpha}, \end{aligned} \right\} \quad (6.13)$$

где, предполагая l_0 постоянным,

$$\varphi(\xi, \eta) = g \left(l_0 - \frac{U^2}{C^2 R} \right),$$

W и Ω также представляют собой функции от ξ и η .

Дифференцируя первое из уравнений (6.13) по α , а второе по β и исключая из этих уравнений сначала смешанную производную от s , а затем смешанную производную от t , получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 t}{\partial \alpha \partial \beta} &= f_t, \\ \frac{\partial^2 s}{\partial \alpha \partial \beta} &= f_s, \end{aligned} \right\} \quad (6.14)$$

где

$$\begin{aligned} f_t &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{B}{gF}} \left[\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \beta} + \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \beta} \right) \frac{\partial t}{\partial \alpha} - \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} + \frac{\partial W}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial t}{\partial \beta} \right], \\ f_s &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{B}{gF}} \left[\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \beta} + \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \beta} \right) W \frac{\partial t}{\partial \alpha} - \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} + \frac{\partial W}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \right) \Omega \frac{\partial t}{\partial \beta} \right]. \end{aligned}$$

Дифференцируя третье и четвертое уравнения (6.13) соответственно по α и β и исключая затем $\frac{\partial^2 t}{\partial \alpha \partial \beta}$ при помощи первого уравнения (6.14), получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \alpha \partial \beta} &= f_\xi, \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial \alpha \partial \beta} &= f_\eta, \end{aligned} \right\} \quad (6.15)$$

где

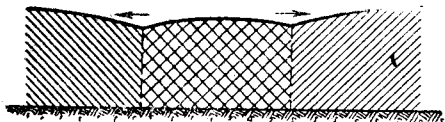
$$\left. \begin{aligned} f_\xi &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial t}{\partial \beta} + f_t \varphi(\xi, \eta), \\ f_\eta &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \beta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \beta} \right) \frac{\partial t}{\partial \alpha} + f_t \varphi(\xi, \eta). \end{aligned} \right\} \quad (6.16)$$

Обозначим также

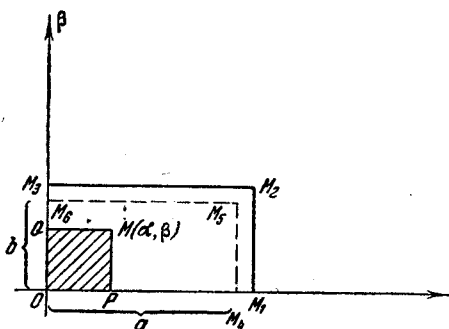
$$\frac{\partial t}{\partial \alpha} = p_t, \quad \frac{\partial t}{\partial \beta} = q_t, \quad \frac{\partial s}{\partial \alpha} = p_s, \dots, \quad \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} = p_\eta, \quad \frac{\partial \eta}{\partial \beta} = q_\eta.$$

Рассмотрим решение задачи об определении неустановившегося движения, возникающего при встрече прямой и обратной волны (§ 12). В момент встречи воли
9*

возникает неустановившееся движение, фронт которого распространяется в сторону отрицательных значений s по закону, определяемому характеристикой $\beta = 0$, принадлежащей прямой волне, и в сторону положительных значений s по закону, определяемому характеристикой $\alpha = 0$, принадлежащей обратной волне (фиг. 64). Рассмотрим плоскость $\alpha\beta$ (фиг. 65).



Фиг. 64.



Фиг. 65.

Вдоль характеристик $\alpha = 0$ (OM_3) и $\beta = 0$ (OM_1) известны значения U , F и s , как функций времени:

при $\alpha = 0$

$$U = U^*(t), \quad F = F^*(t), \quad s = s^*(t) \quad (6.17)$$

и при $\beta = 0$

$$U = U_*(t), \quad F = F_*(t), \quad s = s_*(t). \quad (6.18)$$

При выборе α и β существует известный произвол, так как если, например, $\alpha = \text{const}$ есть характеристика, то $f(\alpha) = \text{const}$, где f есть произвольная монотонная функция, есть также характеристика. Поэтому можно положить: при $\alpha = 0$ $\beta = t$, а при $\beta = 0$ $\alpha = t$. Тогда данные вдоль характеристик $\alpha = 0$ и $\beta = 0$ можно записать в виде

при $\alpha = 0$

$$\xi = \xi^*(\beta), \quad \eta = \eta^*(\beta), \quad s = s^*(\beta), \quad t = \beta \quad (6.19)$$

и при $\beta = 0$

$$\xi = \xi_*(\alpha), \quad \eta = \eta_*(\alpha), \quad s = s_*(\alpha), \quad t = \alpha, \quad (6.20)$$

причем

$$\xi_*(0) = \xi^*(0), \quad \eta^*(0) = \eta_*(0), \quad s_*(0) = s^*(0). \quad (6.21)$$

Функции (6.19) удовлетворяют первому и третьему уравнениям (6.13), а функции (6.20) — второму и четвертому уравнениям (6.13). Для составления интегральных уравнений, отвечающих рассматриваемой задаче, напомним ([9], т. III, ч. 1, стр. 104) решение задачи об определении интеграла по данным его значениям на двух характеристиках $x = 0$ и $y = 0$ для уравнения

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x, y).$$

Пусть при $y = 0$ $z = \pi_1(x)$, а при $x = 0$ $z = \pi_2(y)$, причем $\pi_1(0) = \pi_2(0)$. Тогда соответствующее решение этого уравнения будет:

$$z = \int_0^x \int_0^y f(u, v) \, du \, dv + \pi_1(x) + \pi_2(y) - \pi_1(0), \quad (6.22)$$

как можно убедиться непосредственной проверкой.

Интегрируя по площади прямоугольника $OPMQ$ (фиг. 65) уравнения (6.14) и (6.15) и принимая во внимание условия (6.19), (6.20) и (6.21), получим:

$$\left. \begin{aligned} t(\alpha, \beta) &= \int_0^\alpha \int_0^\beta f_t dx dy + \alpha + \beta, \\ s(\alpha, \beta) &= \int_0^\alpha \int_0^\beta f_{st} dx dy + s^*(\beta) + s_*(\alpha) - s_*(0), \\ \xi(\alpha, \beta) &= \int_0^\alpha \int_0^\beta f_{\xi t} dx dy + \xi^*(\beta) + \xi_*(\alpha) - \xi_*(0), \\ \eta(\alpha, \beta) &= \int_0^\alpha \int_0^\beta f_{\eta t} dx dy + \eta^*(\beta) + \eta_*(\alpha) - \eta_*(0). \end{aligned} \right\} \quad (6.23)$$

Это есть система нелинейных интегродифференциальных уравнений. Дифференцируя каждое из уравнений (6.23) по α и β и присоединяя полученные уравнения

$$\left. \begin{aligned} p_t &= \int_0^\beta f_t dy + 1, \\ q_t &= \int_0^\alpha f_t dx + 1, \\ p_s &= \int_0^\beta f_s dy + s'_*(\alpha), \\ &\dots \dots \dots \\ q_\eta &= \int_0^\alpha f_\eta dx + \eta^{*t}(\beta) \end{aligned} \right\} \quad (6.24)$$

к уравнениям (6.23), получим систему нелинейных интегральных уравнений относительно неизвестных функций $t, s, \xi, \eta, p_t, q_t, \dots, p_\eta, q_\eta$.

Покажем, что эти уравнения могут быть решены методом последовательных приближений (Гурса [9], т. III, ч. 1, стр. 133). Функции f_t, f_s, f_ξ и f_η представляют собой полиномы относительно $p_t, q_t, \dots, p_\eta, q_\eta$ и некоторые ограниченные и дифференцируемые функции от ξ и η при $\xi - \eta > a > 0$. Следовательно, при значениях аргументов, удовлетворяющих неравенствам

$$\left. \begin{aligned} |t| &< A_t, \\ |s - s^*(0)| &< A_s, \\ |\xi - \xi^*(0)| &< A_\xi, \\ |\eta - \eta^*(0)| &< A_\eta, \\ |p_t - 1| &< A_{p_t}, \\ &\dots \dots \dots \\ |q_\eta - \eta^{*t}(0)| &< A_{q_\eta}, \end{aligned} \right\} \quad (6.25)$$

где $A_t, A_s, \dots, A_{q_\eta}$ — некоторые числа, эти функции удовлетворяют условиям:

$$a) \left. \begin{aligned} |f_t| &< M, \\ |f_s| &< M, \\ |f_\xi| &< M, \\ |f_\eta| &< M, \end{aligned} \right\} \quad (6.26)$$

и

$$b) |f_t(\xi^{(1)}, \eta^{(1)}, p_t^{(1)}, \dots, q_\eta^{(1)}) - f_t(\xi^{(2)}, \eta^{(2)}, p_t^{(2)}, \dots, q_\eta^{(2)})| < k(|\xi^{(1)} - \xi^{(2)}| + |\eta^{(1)} - \eta^{(2)}| + \dots + |q_\eta^{(1)} - q_\eta^{(2)}|) \quad (6.27)$$

и аналогичным неравенствам для f_s, f_ξ и f_η .

Условие (6.27) есть так называемое условие Липшица.

Примем за первое приближение

$$t_0 = \alpha + \beta, \quad s_0 = s^*(\beta) + s_*(\alpha) - s_*(0), \quad \dots, \quad q_{\tau_0} = \eta^{*'}(\beta)$$

и затем последовательные приближения будем вычислять по приведенным ниже формулам (6.28), причем $[f]_{n-1}$ обозначает результат подстановки в подинтегральную функцию $n-1$ приближения.

$$\left. \begin{aligned} t_n(\alpha, \beta) &= \int_0^\alpha \int_0^\beta [f_t]_{n-1} dx dy + \alpha + \beta, \\ s_n(\alpha, \beta) &= \int_0^\alpha \int_0^\beta [f_s]_{n-1} dx dy + s^*(\beta) + s_*(\alpha) - s^*(0), \\ \xi_n(\alpha, \beta) &= \int_0^\alpha \int_0^\beta [f_\xi]_{n-1} dx dy + \xi^*(\beta) + \xi_*(\alpha) - \xi^*(0), \\ &\dots \dots \dots \\ q_{\tau_n}(\alpha, \beta) &= \int_0^\alpha [f_\tau]_{n-1} dx + \eta^{*'}(\beta). \end{aligned} \right\} \quad (6.28)$$

Покажем, что можно выбрать некоторые определенные положительные числа a и b , такие, что все функции $t_n, s_n, \dots, q_{\tau_n}$ при любом n будут определены формулами (6.28) в области $0 < \alpha < a$ и $0 < \beta < b$. Пользуясь условием $a)$ (6.26), получим:

$$\left. \begin{aligned} |t_n| &< \alpha\beta M + \alpha + \beta, \\ |s_n - s^*(0)| &< \alpha\beta M + |s^*(\beta) + s_*(\alpha) - 2s^*(0)|, \\ &\dots \dots \dots \\ |p_{\tau_n} - \eta^{*'}(0)| &< \beta M + |\eta^{*'}(\alpha) - \eta^{*'}(0)|, \\ |q_{\tau_n} - \eta^{*'}(0)| &< \alpha M + |\eta^{*'}(\beta) - \eta^{*'}(0)|. \end{aligned} \right\} \quad (6.29)$$

При достаточно малых значениях α и β правые части неравенств (6.29) остаются соответственно меньше $A_t, A_s, A_\xi, \dots, A_{p_\tau}, A_{q_\tau}$. Обозначим через a и b наибольшие значения α и β , при которых это имеет место для всех неравенств (6.29) одновременно. Тогда все функции (6.28) определены в области прямоугольника $OM_4M_3M_6$ (фиг. 65). Этот прямоугольник может совпадать с прямоугольником $M_1M_2M_3O$, а может быть и несколько меньше его. Докажем теперь, что при n , растущем беспрерывно, функции (6.28) стремятся к определенным пределам. Эти пределы будут решениями уравнений (6.23) и (6.24).

Пользуясь условием (6.27), имеем:

$$\begin{aligned} |t_n - t_{n-1}| &< \int_0^\alpha \int_0^\beta K(|\xi_{n-1} - \xi_{n-2}| + |\tau_{n-1} - \tau_{n-2}| + \dots + |q_{\tau, n-1} - q_{\tau, n-2}|) dx dy, \\ &\dots \dots \dots \\ |q_{\tau_n} - q_{\tau, n-1}| &< \int_0^\alpha K(|\xi_{n-1} - \xi_{n-2}| + |\tau_{n-1} - \tau_{n-2}| + \dots + |q_{\tau, n-1} - q_{\tau, n-2}|) dx. \end{aligned}$$

Положим:

$$U_n(\alpha, \beta) = \int_0^\alpha \int_0^\beta 4K \left(U_{n-1} + \frac{\partial U_{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial U_{n-1}}{\partial y} \right) dx dy, \quad (6.30)$$

причем выберем U_1 так, чтобы

$$\begin{aligned} U_1 &> |t_1 - t_0|, & U_1 &> |s_1 - s_0|, & U_1 &> |\xi_1 - \xi_0|, & U_1 &> |\tau_1 - \tau_0|, \\ \frac{\partial U_1}{\partial \alpha} &> |p_{t1} - 1|, & \dots, & \dots, & \frac{\partial U_1}{\partial \alpha} &> |p_{\tau 1} - p_{\tau 0}|, \\ \frac{\partial U_1}{\partial \beta} &> |q_{t1} - 1|, & \dots, & \dots, & \frac{\partial U_1}{\partial \beta} &> |q_{\tau 1} - q_{\tau 0}|. \end{aligned}$$

Но уравнения (6.13) представляют собой уравнения характеристик, и функции (6.33) при $\alpha = \text{const}$ и $\beta = \text{const}$ дают сетку характеристик. Следовательно, эти функции на основании теоремы II (§ 7) удовлетворяют также уравнениям (1.15).

Полученное решение единственно. Это следует из единственности решения системы интегральных уравнений (6.23) и (6.24). Докажем единственность решения для этих последних уравнений.

Допустим, что существует другое решение этих уравнений. Подставим это решение в уравнения (6.23) и (6.24). Вычитая затем полученные тождества из соответствующих уравнений (6.23) и (6.24), мы получаем систему интегральных уравнений. В левой части этих уравнений стоят разности искомого и данного решения. Применяя метод последовательных приближений, можно доказать, что эти разности тождественно равны нулю.

Докажем теперь в частном случае утверждение, высказанное в § 26 при доказательстве теоремы VIII.

Допустим, например, что существует решение системы уравнений (6.13), которое вдоль характеристики $\beta = \beta_0$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = \frac{\partial U}{\partial \alpha} = \frac{\partial t}{\partial \alpha} = \frac{\partial s}{\partial \alpha} = 0, \quad (6.35)$$

следовательно, и $\frac{\partial \xi}{\partial \alpha} = \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} = 0$.

Пусть на какой-нибудь характеристике $\alpha = \text{const}$, пересекающей рассматриваемую характеристику $\beta = \beta_0$, это решение принимает значения

$$\left. \begin{aligned} t &= t(\beta), \\ s &= s(\beta), \\ \xi &= \xi(\beta), \\ \eta &= \eta(\beta). \end{aligned} \right\} \quad (6.36)$$

Уравнениям (6.13), а также условиям (6.35) и (6.36) на характеристиках $\alpha = \alpha_0$ и $\beta = \beta_0$ можно удовлетворить, считая, что t, s, ξ и η совпадают с функциями (6.36) в области некоторого прямоугольника в плоскости $\alpha\beta$, причем две стороны этого прямоугольника совпадают с характеристиками $\alpha = \alpha_0$ и $\beta = \beta_0$. В силу теоремы единственности другого решения уравнений (6.13), удовлетворяющего условиям (6.35) и (6.36), не существует. Отсюда следует, что решение уравнения (6.13), удовлетворяющее условиям (6.35) вдоль характеристики $\beta = \beta_0$, может зависеть только от β . Но в этом решении s есть функция от t и, следовательно, это решение не может быть решением уравнений (1.15).

Задача Коши, а также смешанные задачи решаются совершенно аналогичным образом. Только для составления интегральных уравнений нужно воспользоваться решением этих задач для уравнения $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x, y)$ (см. Гурса [9], т. III, ч. 1, §§ 489, 490).

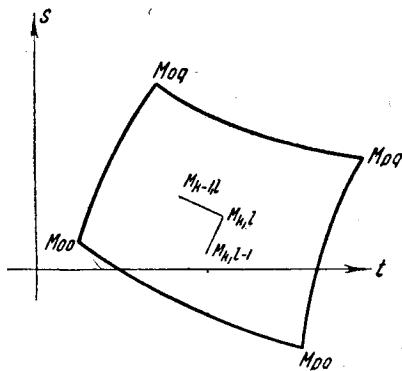
Можно высказать следующее общее положение: если известно решение какой-нибудь краевой задачи для уравнения $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x, y)$, причем это решение получается в замкнутом виде, то всегда, пользуясь изложенным методом, можно получить решение соответствующей задачи для уравнений (1.15).

Доказательство утверждения, высказанного в § 26 при доказательстве теоремы VIII, в случае, когда кривая $\beta = \lambda(\alpha)$ не совпадает с характеристикой, можно получить, основываясь на решении задачи Коши, совершенно так же, как это было сделано выше для частного случая.

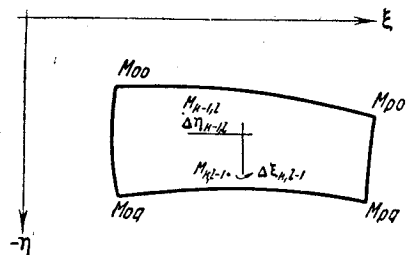
§ 28. Расчеты неустановившихся движений

Рассмотрим теперь метод приближенного построения различных решений уравнений Буссинеска (1.15). Это есть метод Massau [25]. При помощи этого метода Ф. И. Франкль и И. А. Кибель [30, 32] дали решение ряда задач газовой динамики.

Так же, как в гл. 5, мы заменим графическое решение аналитическим, так как графический метод при проверке оказался недостаточно надежным. Мы изложим этот метод применительно к решению задачи об определении волны, возникающей при встрече прямой и обратной волны (фиг. 64). В момент встречи прямой и обратной волны возникает новое неустановившееся движение, фронт которого распространяется вдоль прямой волны в сторону отрицательных значений s и вдоль обратной волны — в сторону положительных значений s . Фронт, распространяющийся в сторону отрицательных значений s , соответствует характеристике $\beta = \beta_0$, принадлежащей прямой волне. Эта характеристика известна, так как прямая волна считается данной. Точно так же закон распространения фронта волны в сторону положительных значений s определяется характеристикой $\alpha = \alpha_0$, принадлежащей обратной волне. Эта характеристика также известна, так как и обратная волна считается данной.



Фиг. 66.



Фиг. 67.

Нам известны значения t, s, U и F вдоль характеристики $M_{00}M_{p0}$ ($\beta = \beta_0$) и вдоль характеристики $M_{00}M_{0q}$ ($\alpha = \alpha_0$) (фиг. 63). Точки M_{0q} и M_{p0} определяются временем, в течение которого рассматривается волна. Остановимся сначала на случае призматического русла. Пользуясь обычными обозначениями, перепишем уравнение характеристик (2.29) и (2.30) в виде

первое семейство:

$$\left. \begin{aligned} ds &= W dt, \\ d\xi &= \varphi(\xi, \eta) dt, \end{aligned} \right\} \quad (6.37)$$

второе семейство:

$$\left. \begin{aligned} ds &= \Omega dt, \\ d\eta &= \varphi(\xi, \eta) dt, \end{aligned} \right\} \quad (6.38)$$

где

$$\varphi(\xi, \eta) = g \left(i_0 - \frac{U^2}{C^2 R} \right),$$

и нанесем в плоскостях ts и $\xi\eta$ характеристики $\alpha = \alpha_0$ и $\beta = \beta_0$ (фиг. 66 и 67).

Допустим, что решение

$$\begin{aligned} t &= t(\alpha, \beta), \\ s &= s(\alpha, \beta), \\ \xi &= \xi(\alpha, \beta), \\ \eta &= \eta(\alpha, \beta) \end{aligned}$$

найденно. Придавая α и β постоянные значения

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_k & (k = 1, 2, \dots, p), \\ \beta &= \beta_l & (l = 1, 2, \dots, q), \end{aligned}$$

нанесем в плоскостях ts и $\xi\eta$ соответствующую сетку характеристик. В плоскости $\xi\eta$ мы не имеем уже прямоугольной сетки. Искривление характеристик в этой плоскости соответствует влиянию сил сопротивления. Если построены сетки характеристик, то в те моменты времени, которые отвечают точкам пересечения характеристик в плоскости ts , в соответствующих этим точкам сечениях канала можно указать, пользуясь сеткой характеристик в плоскости $\xi\eta$, глубину и среднюю скорость. Имея достаточно густо построенную сетку характеристик, можно с любой степенью точности определить неустановившееся движение.

Пользуясь граничными данными вдоль характеристик $\alpha = \alpha_0$ и $\beta = \beta_0$ и дифференциальными уравнениями характеристик (2.29) и (2.30), можно построить, аналогично тому, как это было сделано в гл. 5, сетки ломаных линий в плоскостях ts и $\xi\eta$, приближенно дающих соответствующие сетки характеристик. Опираясь на существование и единственность решения, можно утверждать, что построенные сетки ломаных линий дают приближенное решение задачи. В рассматриваемом случае уже не удастся получить простого выражения для погрешности. Однако порядок погрешности и в этом случае будет тот же, что в случае гл. 5. По полученной в гл. 5 оценке погрешности можно судить о степени точности метода и в рассматриваемом случае. Так же, как и раньше, обозначим через M_{kl} точку пересечения характеристик $\alpha = \alpha_k$ и $\beta = \beta_l$, а через t_{kl} , s_{kl} , ξ_{kl} и η_{kl} — значения t , s , ξ и η , соответствующие этой точке.

Разобьем промежутки изменения β вдоль характеристики $\alpha = \alpha_0$ на q частей, а промежутки изменения α вдоль характеристики $\beta = \beta_0$ на p частей. Эту разбивку можно произвести, например, через равные интервалы изменения $\sqrt{\frac{gF}{B}}$ или W и Ω . Соответствующие точкам деления значения t , s , ξ , η (а следовательно, и U и F) известны. Запишем эти значения в первой строке и в первом столбце таблицы.

Допустим теперь, что часть таблицы заполнена и что соответствующая часть сетки ломаных линий нанесена в плоскостях ts и $\xi\eta$. Предположим, что точки $M_{k-1, l}$ и $M_{k, l-1}$ нам известны. Покажем, как, пользуясь уравнениями характеристик (6.37) и (6.38), можно найти точку M_{kl} и одновременно заполнить клетку таблицы, соответствующую этой точке. Точки $M_{k-1, l}$ и $M_{k, l-1}$ изображены на фиг. 66 и 67. Для определения положения точки M_{kl} в плоскости ts заметим, что в точках $M_{k-1, l}$ и $M_{k, l-1}$ нам известны угловые коэффициенты касательных к характеристикам $\alpha = \alpha_k$ и $\beta = \beta_l$. Заменяем на рассматриваемом небольшом участке кривые (характеристики) их касательными. Проведем через точки $M_{k-1, l}$ и $M_{k, l-1}$ прямые с угловыми коэффициентами $\Omega_{k-1, l}$ и $W_{k, l-1}$ (фиг. 66):

$$\left. \begin{aligned} s - s_{k-1, l} &= W_{k, l-1} (t - t_{k, l-1}), \\ s - s_{k-1, l} &= \Omega_{k-1, l} (t - t_{k-1, l}). \end{aligned} \right\} \quad (6.39)$$

Таблица 7

$k \backslash l$	0	1	2	$q-1$	q
0	$t_{00}S_{00}$ $\xi_{00}\eta_{00}$	$t_{01}S_{01}$ $\xi_{01}\eta_{01}$	$t_{02}S_{02}$ $\xi_{02}\eta_{02}$		$t_{0q}S_{0q}$ $\xi_{0q}\eta_{0q}$
1	$t_{10}S_{10}$ $\xi_{10}\eta_{10}$	$t_{11}S_{11}$ $\xi_{11}\eta_{11}$	$t_{12}S_{12}$ $\xi_{12}\eta_{12}$		$t_{1q}S_{1q}$ $\xi_{1q}\eta_{1q}$
2	$t_{20}S_{20}$ $\xi_{20}\eta_{20}$	$t_{21}S_{21}$ $\xi_{21}\eta_{21}$	$t_{22}S_{22}$ $\xi_{22}\eta_{22}$		
...
...
p	$t_{p0}S_{p0}$ $\xi_{p0}\eta_{p0}$	$t_{p1}S_{p1}$ $\xi_{p1}\eta_{p1}$	$t_{p2}S_{p2}$ $\xi_{p2}\eta_{p2}$		$t_{pq}S_{pq}$ $\xi_{pq}\eta_{pq}$

Решая систему уравнений (6.39), получим:

$$\left. \begin{aligned} t_{kl} &= \frac{W_{k,l-1}t_{k,l-1} - S_{k,l-1}}{W_{k,l-1} - \Omega_{k-1,l}} - \frac{\Omega_{k-1,l}t_{k-1,l} - S_{k-1,l}}{W_{k,l-1} - \Omega_{k-1,l}}, \\ S_{kl} &= \Omega_{k-1,l} \frac{W_{k,l-1}t_{k,l-1} - S_{k,l-1}}{W_{k,l-1} - \Omega_{k-1,l}} - W_{k,l-1} \frac{\Omega_{k-1,l}t_{k-1,l} - S_{k-1,l}}{W_{k,l-1} - \Omega_{k-1,l}}. \end{aligned} \right\} \quad (6.40)$$

Для определения положения точки M_{kl} в плоскости $\xi\eta$ заменим дифференциалы в уравнениях характеристик (6.37) и (6.38) конечными разностями. Если бы сил сопротивления не было, то характеристики в плоскости $\xi\eta$ были бы прямыми, параллельными осям координат, и координаты точки M_{kl} в плоскости $\xi\eta$ были бы $\xi_{kl} = \xi_{k,l-1}$ и $\eta_{kl} = \eta_{k-1,l}$.

При наличии же сопротивления ξ_{kl} и η_{kl} будут:

$$\left. \begin{aligned} \xi_{kl} &= \xi_{k,l-1} + \Delta\xi_{k,l-1}, \\ \eta_{kl} &= \eta_{k-1,l} + \Delta\eta_{k-1,l}. \end{aligned} \right\} \quad (6.41)$$

Пользуясь уравнениями (6.37) и (6.38), получим:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\xi_{k,l-1} &= \varphi(\xi_{k,l-1}, \eta_{k,l-1})(t_{kl} - t_{k,l-1}); \\ \Delta\eta_{k-1,l} &= \varphi(\xi_{k-1,l}, \eta_{k-1,l})(t_{kl} - t_{k-1,l}), \end{aligned} \right\} \quad (6.42)$$

здесь

$$\varphi(\xi, \eta) = g \left(i_0 - \frac{U^2}{C^2 R} \right).$$

В частности для параболических русел при $C^2 = \text{const}$:

$$\varphi(\xi, \eta) = g \left[i_0 - \frac{4g\eta^2}{C^2} \left(\frac{\xi + \eta}{\xi - \eta} \right)^2 \right]. \quad (6.43)$$

Пользуясь формулами (6.40), (6.41) и (6.42), а также граничными данными в первом столбце и первой строке таблицы, можно, последовательно переходя от клетки к клетке, заполнить всю таблицу и построить приближенно сетки характеристик в плоскостях ts и $\xi\eta$. Определяя по ξ и η U , F и H , получим приближенное решение задачи.

Рассмотрим теперь другие краевые задачи. Рекуррентные формулы (6.40), (6.41) и (6.42) позволяют последовательно заполнить прямоугольную или треугольную таблицу вида табл. 7.

Если даны значения t , s , ξ и η в некоторых начальных клетках, то эти значения определяются теми или иными граничными условиями.

Начнем с рассмотрения задачи Коши. В частности, эта задача отвечает определению неустановившегося движения по наблюдениям в каком-нибудь сечении канала (§ 13).

Данные Коши соответствуют значениям U и F вдоль кривой $s = \varphi(t)$. Эта кривая может быть $s = 0$ или $t = 0$. Разобьем промежуток времени на p частей и вычислим, пользуясь этими граничными данными, s , U и F в точках деления. Записывая эти значения в диагональных клетках табл. 7, можно, последовательно пользуясь формулами (6.40), (6.41) и (6.42), заполнить квадратную таблицу, аналогичную табл. 7.

Рассмотрим теперь задачу о распространении волны одного направления, т. е. волны, нарушающей первоначальное установившееся движение жидкости в канале. Расчет неустановившегося движения, отвечающего волне одного направления, представляет собой одну из наиболее важных задач. Расчет распространения и расплывания паводка, расчет приливной волны, распространяющейся в устье реки, расчеты волн, возникающих при регулировании гидроэлектрических станций, сводятся к расчету распространения волн одного направления. В случае, когда принимается во внимание влияние сил сопротивления и непризматичность русла, волны одного направления уже не определяются интегралами (2.10) и (2.12).

Рассмотрим, какие граничные условия определяют волну одного направления.

Волна одного направления нарушает первоначальное установившееся движение в канале. Закон распространения этого фронта отвечает характеристике установившегося движения.

Характеристики установившегося движения были рассмотрены в § 8. При построении характеристик для случая, когда волна распространяется в русле прямоугольного сечения или в русле, сечение которого соответствует параболе второй степени, надо пользоваться таблицами С. А. Керцелли (прил. III). Кроме данных вдоль фронта волны, для определения волны одного направления нужны еще дополнительные данные. Мы рассмотрим два случая, имеющих наибольшее практическое значение. Эти случаи соответствуют заданному изменению расхода или заданному закону изменения высоты уровня в каком-нибудь сечении канала.

Рассмотрим для определенности прямую волну. Допустим, что в момент $t = t_0$ в сечении канала $s = 0$ первоначально постоянная высота уровня в канале начинает изменяться с течением времени, следуя закону

$$\text{при } s = 0 \quad F = F_0(t). \quad (6.44)$$

Обозначим через $\alpha = \alpha_0$ характеристику, соответствующую распространению фронта прямой волны, и вычислим, — пользуясь либо формулами (2.36), если первоначальное движение в канале было равномерным, либо таблицами С. А. Керцелли, если первоначальный режим в канале соответствовал кривой подпора или спада, — значения t, s, U, F , а также ξ и η в p точках вдоль характеристики $\alpha = \alpha_0$.

Запишем эти значения в первую строку табл. 7. Условие (6.44) определяет значения t, s, U, F, ξ и η в диагональных клетках таблицы.

Допустим, что нам известны значения t, s, U, F, ξ и η в точке $M_{k-1, k}$ в плоскостях $ts, \xi\eta$ и UF . Для определения точки M_{kk} в плоскости ts найдем точку пересечения характеристики $\beta = \beta_k$ (6.39) и прямой $s = 0$.

Пользуясь вторым уравнением (6.39), получим:

$$s_{kk} = 0, \quad t_{kk} = t_{k-1, k} - \frac{s_{k-1, k}}{\Omega_{k-1, k}}, \quad (6.45)$$

значение η_{kk} вычисляется из (6.41), а для определения ξ_{kk} воспользуемся условием (6.44) и уравнением

$$\xi - \eta = 2\lambda(F).$$

Таким образом для определения η_{kk} и ξ_{kk} имеем:

$$\left. \begin{aligned} \eta_{kk} &= \eta_{k-1, k} + \Delta\eta_{k-1, k}, \\ \xi_{kk} &= \eta_{kk} + 2\lambda[F_0(t_{kk})]. \end{aligned} \right\} \quad (6.46)$$

Если в сечении $s = 0$ дано не изменение высоты уровня, а изменение расхода с течением времени (этот случай как раз имеет место при регулировании гидроэлектрических установок), то последнее уравнение (6.46) надо заменить другим.

Пусть закон изменения расхода в сечении $s = 0$ будет:

$$Q = UF = Q_0(t). \quad (6.47)$$

Для определения U и F , а, следовательно, ξ и η в сечении $s = 0$ надо определить точку пересечения кривой

$$UF = Q_0(t_{kk}) \quad (6.48)$$

и кривой

$$U - \lambda(F) = \eta_{kk}. \quad (6.49)$$

Решение системы этих уравнений производится графическим путем.

Совершенно аналогично записываются граничные условия, относящиеся к различным задачам об отражении.

Если русло непризматическое, то вводить переменные ξ и η не имеет смысла. Тогда надо прямо рассматривать плоскости ts и UF и строить в них сетки характеристик, пользуясь уравнениями

$$\left. \begin{aligned} ds &= \left(U + \sqrt{\frac{gF}{B}} \right) dt, \\ dU + \sqrt{\frac{g}{BF}} dF &= g \left(i_0 - \frac{U^2}{C^2R} \right) dt \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

и

$$\left. \begin{aligned} ds &= \left(U - \sqrt{\frac{gF}{B}} \right) dt, \\ dU - \sqrt{\frac{g}{BF}} dF &= g \left(i_0 - \frac{U^2}{C^2 R} \right) dt. \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

Уравнения (6.40) остаются при этом неизменными, а для определения точки M_{kl} в плоскости UF надо определить точку пересечения прямых, определяемых вторыми уравнениями (2.29) и (2.30). При построении сетки характеристик мы заменяем кривые ломаными и пользуемся при их построении дифференциальными уравнениями (2.29) и (2.30). В некоторой окрестности

точки $M_{k,l-1}$ можно приближенно положить:

$$dU \approx U - U_{k,l-1}$$

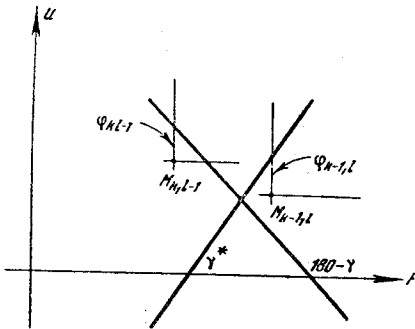
и

$$dF \approx F - F_{k,l-1}$$

и точно так же в окрестности точки $M_{k-1,l}$ можно приближенно считать:

$$dU \approx U - U_{k-1,l}$$

$$dF \approx F - F_{k-1,l}$$



Фиг. 68.

Тогда, пользуясь вторыми уравнениями (2.29) и (2.30), можно записать уравнения прямых, которыми мы на данном небольшом участке заменяем характеристики $\alpha = \alpha_k$ и $\beta = \beta_l$ в плоскости UF в виде (фиг. 68):

$$\left. \begin{aligned} U - U_{k,l-1} &= -\sqrt{\frac{g}{B_{k,l-1}F_{k,l-1}}} (F - F_{k,l-1}) + \varphi_{k,l-1}, \\ U - U_{k-1,l} &= \sqrt{\frac{g}{B_{k-1,l}F_{k-1,l}}} (F - F_{k-1,l}) + \varphi_{k-1,l} \end{aligned} \right\} \quad (6.50)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{k,l-1} &= g \left(i_0 - \frac{U_{k,l-1}^2}{C_{k,l-1}^2 R_{k,l-1}} \right) (t_{kl} - t_{k,l-1}), \\ \varphi_{k-1,l} &= g \left(i_0 - \frac{U_{k-1,l}^2}{C_{k-1,l}^2 R_{k-1,l}} \right) (t_{kl} - t_{k-1,l}) \end{aligned} \right\} \quad (6.51)$$

и

$$\operatorname{tg} \gamma = \sqrt{\frac{g}{B_{k-1,l}F_{k-1,l}}}, \quad \operatorname{tg} \gamma^* = \sqrt{\frac{g}{B_{k,l-1}F_{k,l-1}}}.$$

Определим точку пересечения прямых (6.50).

Обозначим:

$$\left. \begin{aligned} a_{k,l-1} &= U_{k,l-1} + \sqrt{\frac{gF_{k,l-1}}{B_{k,l-1}}} + \varphi_{k,l-1}, \\ b_{k-1,l} &= U_{k-1,l} - \sqrt{\frac{gF_{k-1,l}}{B_{k-1,l}}} + \varphi_{k-1,l} \end{aligned} \right\} \quad (6.52)$$

Тогда для U_{kl} и F_{kl} получим следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} F_{kl} &= \frac{1}{\frac{1}{F_{k-1,l}} \sqrt{\frac{gF_{k-1,l}}{B_{k-1,l}}} + \frac{1}{F_{k,l-1}} \sqrt{\frac{gF_{k,l-1}}{B_{k,l-1}}}} (a_{k,l-1} - b_{k-1,l}), \\ U_{kl} &= \frac{1}{\frac{1}{F_{k-1,l}} \sqrt{\frac{gF_{k-1,l}}{B_{k-1,l}}} + \frac{1}{F_{k,l-1}} \sqrt{\frac{gF_{k,l-1}}{B_{k,l-1}}} + \frac{b_{k-1,l}}{F_{k,l-1}} \sqrt{\frac{gF_{k,l-1}}{B_{k,l-1}}}} \left(\frac{a_{k,l-1}}{F_{k-1,l}} \sqrt{\frac{gF_{k-1,l}}{B_{k-1,l}}} + \right) \end{aligned} \right\} \quad (6.53)$$

§ 29. Примеры расчетов

Пример I. В качестве первого примера приведем *расчет прямой волны, распространяющейся в призматическом русле*. Сечение русла ограничено параболой второй степени, $k=2$, $n=\frac{3}{2}$. Дно канала горизонтально ($i_0=0$).

Первоначально вода в канале находится в покое, причем глубина в канале равна $h=3$ м. Коэффициент шероховатости C мы выбираем по формуле Маннинга (1.10) $C=40h^{\frac{1}{6}}=48$. Волна появляется в сечении $s=0$ в момент $t=0$, причем, начиная с этого момента, высота уровня изменяется в сечении $s=0$, следуя закону

$$H_0(t) = 5 - \sqrt{25 - \frac{25200 + t}{1200}}, \quad (6.54)$$

в течение 4800 сек.; t выражено в секундах, а H — в метрах. Закон распространения фронта волны определяется из (2.36):

$$s = 4.43t. \quad (6.55)$$

Вдоль этого фронта $U=0$, $H=3$ м и, следовательно, $\xi_{0l} = -\eta_{0l} = 13.29$ м/сек, а всилу (6.42) $\Delta\eta_{0l} = 0$. Промежуток времени, определяющий точность расчета, принимаем равным

$$\Delta t = 166.7 \text{ сек.}$$

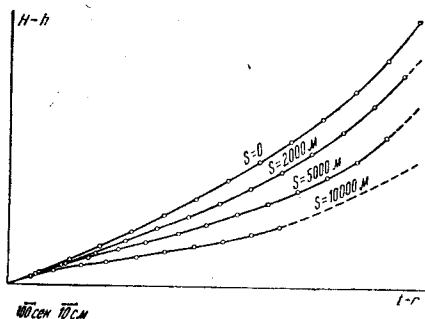
и вычисляем по формуле (6.55) соответствующие значения s . Данные, относящиеся к распространению фронта волны, записываем в первой строке таблицы прил. V. Значения t , s , U и H , соответствующие сечению $s=0$, располагаем в диагональных клетках этой таблицы. Эти значения вычисляются последовательно по формулам (6.45) и (6.46):

$$\left. \begin{aligned} \eta_{kk} &= \eta_{k-1,k} + \Delta\eta_{k-1,k}, \\ \xi_{kk} &= \eta_{kk} + 4 \sqrt{\frac{3}{2} gH_0(t_{kk})}, \\ s_{kk} &= 0, \quad t_{kk} = t_{k-1,k} - \frac{s_{k-1,k}}{\Omega_{k-1,k}}, \end{aligned} \right\} \quad (6.56)$$

где $\eta = U - 2 \sqrt{\frac{3}{2} gH}$, $\xi = U + 2 \sqrt{\frac{3}{2} gH}$, $\Omega = U - \sqrt{\frac{2g}{3} H}$.

Значения t , s , ξ , η , а затем U и H вычисляются последовательно при помощи формул (6.40), (6.41) и (6.42). Результаты вычислений приведены

в прил. V. На фиг. 69 даны местные кривые высоты уровня, отвечающие сечениям $s=2000$ м, $s=5000$ м и $s=10000$ м. Эти кривые построены путем интерполирования значений t , s , U и H , содержащихся в прил. V. На фиг. 69 хорошо видно расплывание волны под действием сил сопротивления.

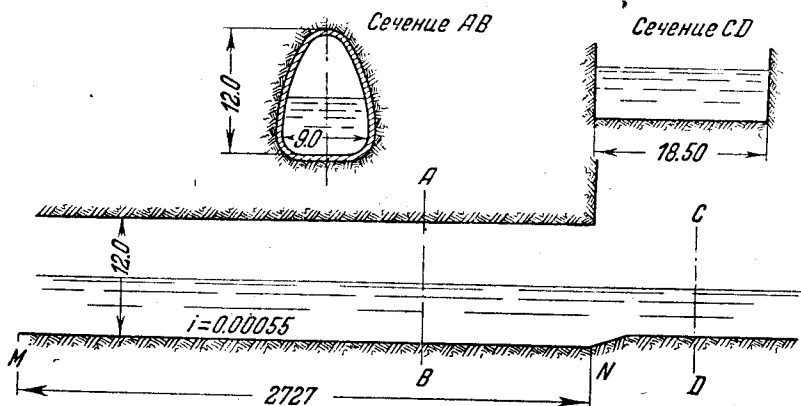


Фиг. 69.

Пример II. В качестве второго примера рассмотрим *распространение волны в тоннеле*. Поперечный разрез тоннеля и канала, которым он заканчивается, изображен на фиг. 70. Поперечное сечение тоннеля изображено на фиг. 71. Размеры тоннеля и канала указаны на этих фигурах. Графики зависимости R , F и C от H для тоннеля даны на фиг. 72. Уклон дна тоннеля

равен $i_0=0.00055$. Первоначальный установившийся режим в канале отвечает расходу $Q_0=50$ м³/сек, причем глубина в конце канала равна $H_N=9.50$ м.

В момент, который мы примем за $t=0$, в начале тоннеля в сечении M появляется волна, причем эта волна соответствует равномерному увеличению расхода от значения $Q_0=50$ м³/сек до значения $Q=235$ м³/сек в течение 6 мин. Затем расход остается постоянным. Изменение расхода в сечении M вызывает прямую волну, которая распространяется в тоннеле. Когда фронт этой волны



Фиг. 70.

достигнет конца тоннеля, то в канале, которым заканчивается тоннель, возникает прямая волна, а в тоннеле начнет распространяться отраженная волна. Наша задача будет состоять в построении как прямой, так и отраженной волны, распространяющейся в тоннеле.

Расчет волны начинается с построения кривой подпора, соответствующей первоначальному установившемуся режиму, и с определения закона распространения фронта волны.

Построение кривой подпора производится при помощи формулы (1.42). Начало отсчета s помещаем в начале тоннеля:

$$s - s_N = \int_{H_N}^H \Phi(H) dH, \quad (6.57)$$

где

$$\Phi(H) = \frac{1 - \frac{Q_0^2 B}{gF^3}}{i_0 - \frac{Q_0^2}{C^2 R F^2}}. \quad (6.58)$$

Интеграл (6.57) вычисляется при помощи формул трапеций:

$$s_n - s_N = -\Delta H \left[\frac{1}{2} \Phi(H_N) + \Phi(H_1) + \dots + \Phi(H_{n-1}) + \frac{1}{2} \Phi(H_n) \right],$$

причем $\Delta H = 0.143$ м.

Результаты вычислений приведены в строке $k=0$ прил. VI. Для определения закона распространения фронта волны воспользуемся формулой

$$\frac{dH}{ds} = \frac{i_0 - \frac{Q_0^2}{C^2 R F^2}}{1 - \frac{Q_0^2 B}{gF^3}} \quad (1.22)$$

и дифференциальным уравнением характеристики

$$ds = \left(U + \sqrt{\frac{gF}{B}} \right) dt. \quad (2.29)$$

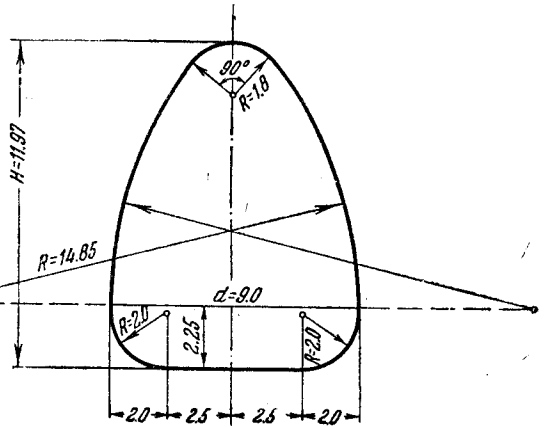
Исключая из этих уравнений ds , получим для определения t уравнение:

$$t - t_N = \int_{H_N}^H \Phi^*(H) dH, \quad (6.59)$$

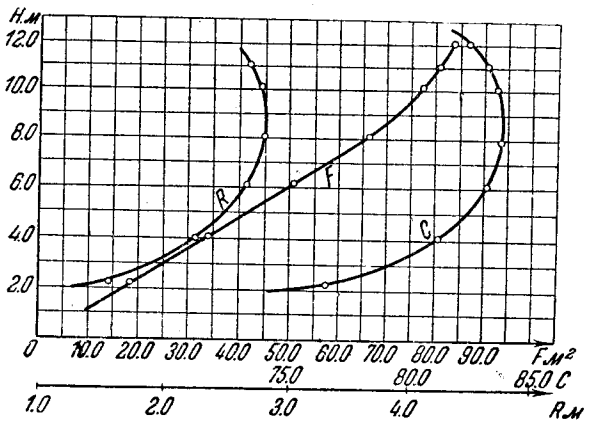
где

$$\Phi^*(H) = \frac{\Phi(H)}{F + \sqrt{\frac{gF}{B}}} \quad (6.60)$$

и t_N есть момент появления фронта волны в конце тоннеля; мы считаем, что в начале тоннеля этот фронт появляется в момент $t=0$. Интеграл (6.59) также вычисляется при помощи формулы трапеций и для тех же значений H , как и интеграл (6.57). Результаты вычислений также приведены в строке $k=0$ прил. VI.



Фиг. 71.



Фиг. 72.

Построение волны производим, пользуясь рекуррентными формулами (6.40) и (6.53). Надо только показать, как определяются значения t , s , U и F в диагональных клетках таблицы. Диагональные клетки соответствуют сечению $s=0$

В сечении $s=0$ мы имеем (6.45):

$$s_{kk} = 0, \quad t_{kk} = t_{k-1,k} - \frac{s_{k-1,k}}{\Omega_{k-1,k}}.$$

Так как в сечении $s=0$ дан закон изменения расхода

$$Q = f_0(t) = 50 + 0.514 t, \quad (6.61)$$

то значения U и F в момент t_{kk} определяются как точки пересечения кривой

$$UF = f_0(t_{kk})$$

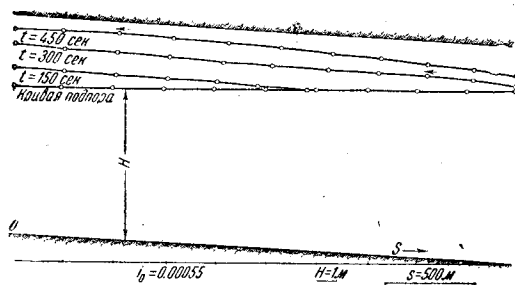
и характеристики $\beta = \beta_k$ [второе уравнение (6.50)], откуда

$$\left. \begin{aligned} U_{kk} &= \frac{b_{k-1,k}}{2} + \sqrt{\frac{b_{k-1,k}^2}{4} + \frac{f_0(t_{kk})}{F_{k-1,k}} \sqrt{\frac{gF_{k-1,k}}{B_{k-1,k}}}} \\ F_{kk} &= \frac{f_0(t_{kk})}{U_{kk}} \end{aligned} \right\} \quad (6.62)$$

Результаты вычислений приведены в прил. VI. Соответствующие мгновенные профили даны на фиг. 73.

В момент $t_N = 245$ сек. фронт прямой волны достигает конца тоннеля. В этот момент возникает отраженная волна. При построении отраженной волны

мы сделаем допущение, несколько упрощающее вычисления, а именно: мы будем пренебрегать влиянием сил сопротивления на прямую волну в канале, которым заканчивается тоннель. При расчете отраженной волны пользуемся теми же формулами (6.40) и (6.53). Фронт отраженной волны распространяется в сторону отрицательных значений s по закону,



Фиг. 73.

определенному характеристикой $l=10$ (см. прил. VI).

В сечении N при переходе от тоннеля к каналу дно имеет ступеньку высотой в 1 м (фиг. 70). Условия в сечении $s_N = 2727$, определяющие отраженную волну, будут:

$$\begin{aligned} s_{k,10+k} &= 2727, \\ t_{k,10+k} &= t_{k,10+k-1} + \frac{2727 - s_{k,10+k-1}}{W_{k,10+k-1}}, \end{aligned}$$

и условия, выражающие равенство расходов в тоннеле и в канале в сечении $s = 2727$ и непрерывность кривой свободной поверхности при переходе через это сечение.

Для определения $U_{k,10+k}$ и $F_{k,10+k}$ находим точку пересечения характеристики $a = a_k$, проходящей через точку $M_{k,10+k=1}$, и кривой, выражающей равенство расходов в канале и в тоннеле в сечении N , т. е. решаем систему уравнений

$$U = -\sqrt{\frac{g}{B_{k,10+k-1} F_{k,10+k-1}}} F + a_{k,10+k=1},$$

$$U = \frac{18.5(H-1)(2\sqrt{g(H-1)} - 2\sqrt{8.5g} + 0.312)}{F}.$$

При составлении второго уравнения пользуемся формулой (2.20). Первоначальная глубина в канале 8.5 м, а первоначальная средняя скорость 0.312 м/сек.

Решение этой системы уравнений производится графическим путем. Результаты вычислений приведены в прил. VI. На фиг. 73 нанесены также участки профиля отраженной волны. Начало их отмечено стрелками.

§ 30. Волны малой амплитуды

При решении некоторых задач, относящихся к распространению длинных волн, пользуются иногда дифференциальными уравнениями волн малого подъема или малой амплитуды. Эти уравнения можно получить путем некоторого упрощения уравнений Буссинеска, основанного на следующих двух гипотезах:

1. Силы сопротивления считаются пропорциональными не второй, а первой степени скорости, так что при равномерном движении имеет место зависимость

$$i_0 g = \gamma U, \tag{6.63}$$

где γ — постоянная.

2. Подъем уровня над ординаром считается малым по сравнению с первоначальной глубиной в канале.

При рассмотрении преобразования уравнений Буссинеска соответственно этим гипотезам ограничимся только случаем параболических русел. Уравнения Буссинеска (1.12) в случае параболических русел (1.16) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} i_0 - \frac{nU^2}{C^2 H} - \frac{\partial H}{\partial s} &= \frac{U}{g} \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t}, \\ \frac{\partial H}{\partial t} + U \frac{\partial H}{\partial s} + \frac{H}{n} \frac{\partial U}{\partial s} &= 0. \end{aligned} \right\} \tag{6.64}$$

Мы считаем в уравнениях (1.12) $\alpha = 1$ и $R \approx \frac{H}{n}$.

В соответствии с первой гипотезой (6.63) уравнения надо переписать в виде:

$$\left. \begin{aligned} g i_0 - \gamma U - g \frac{\partial H}{\partial s} &= U \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial t}, \\ \frac{\partial H}{\partial t} + U \frac{\partial H}{\partial s} + \frac{H}{n} \frac{\partial U}{\partial s} &= 0. \end{aligned} \right\} \tag{6.65}$$

Обычно ([8], стр. 282) уравнение (6.65) в соответствии со второй гипотезой упрощают следующим образом.

Положим:

$$U = u + v$$

и

$$H = h + z,$$

где u и h — первоначальная скорость и первоначальная глубина в канале, а v и z — изменение скорости и глубины вследствие появления в канале длинных волн. Добавочная скорость v и добавочный подъем уровня z считаются весьма малыми по сравнению с первоначальной скоростью и глубиной в канале.

Подставляя эти выражения в уравнения (6.65) и принимая во внимание условие (6.63), получим для случая прямоугольного канала ($n = 1$):

$$\left. \begin{aligned} -\gamma v - g \frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial s} + v \frac{\partial v}{\partial s}, \\ \frac{\partial z}{\partial t} + u \frac{\partial z}{\partial s} + h \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial(zv)}{\partial s} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.66)$$

В соответствии со второй гипотезой отбросим в уравнении неразрывности член $\frac{\partial(zv)}{\partial s}$, а в динамическом уравнении — член $v \frac{\partial v}{\partial s}$. После этого упрощения получим систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\left. \begin{aligned} -\gamma v - g \frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial s}, \\ \frac{\partial z}{\partial t} + u \frac{\partial z}{\partial s} + h \frac{\partial v}{\partial s} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.67)$$

Исключим из этих уравнений v . Дифференцируя первое уравнение по s и пользуясь вторым уравнением, получим:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + 2u \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial s} + (u^2 - gh) \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} + \gamma \left(\frac{\partial z}{\partial t} + u \frac{\partial z}{\partial s} \right) = 0. \quad (6.68)$$

Если исключить из уравнений (6.67) z , то для добавочной скорости v получим совершенно аналогичное уравнение:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2u \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial s} + (u^2 - gh) \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \gamma \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial s} \right) = 0. \quad (6.69)$$

Если пренебрегать силами сопротивления, то уравнение (6.68) переходит в уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + 2u \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial s} + (u^2 - gh) \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} = 0. \quad (6.70)$$

Если же начальная скорость в канале равна нулю, то получаем:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - gh \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} = 0. \quad (6.71)$$

Уравнение (6.71) было дано еще Лагранжем. Выведем уравнения характеристик для уравнений (6.67). Присоединяя к уравнениям (6.67) уравнения

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial z}{\partial t} dt + \frac{\partial z}{\partial s} ds, \\ dv &= \frac{\partial v}{\partial t} dt + \frac{\partial v}{\partial s} ds \end{aligned}$$

и решая затем полученную систему уравнений относительно производных, получим:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\begin{vmatrix} 0 - \gamma v & 1 & u \\ 1 & 0 & 0 \\ dt & dz & 0 & 0 \\ 0 & dv & dt & ds \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & g & 1 & u \\ 1 & u & 0 & h \\ dt & ds & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dt & ds \end{vmatrix}} \quad (6.72)$$

и аналогичные выражения для остальных производных. Приравняв числитель и знаменатель в выражении (6.72) нулю, получим:

$$\begin{aligned} ds^2 - 2u dt ds + (u^2 - gh) dt^2 &= 0, \\ (dv + \gamma v dt) h dt + (ds - u dt) dz &= 0. \end{aligned}$$

Решая первое уравнение относительно $\frac{ds}{dt}$ и подставляя полученное значение во второе уравнение, получим уравнения характеристик:

первое семейство:

$$\left. \begin{aligned} ds &= (u + \sqrt{gh}) dt, \\ \sqrt{gh} dz + h (dv + \gamma v dt) &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (6.73)$$

второе семейство:

$$\left. \begin{aligned} ds &= (u - \sqrt{gh}) dt, \\ -\sqrt{gh} dz + h (dv + \gamma v dt) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.74)$$

Интегрируя первые уравнения (6.73) и (6.74), получим:

$$\left. \begin{aligned} s &= (u + \sqrt{gh}) t + \alpha, \\ \sqrt{gh} dz + h (dv + \gamma v dt) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.75)$$

и

$$\left. \begin{aligned} s &= (u - \sqrt{gh}) t + \beta, \\ -\sqrt{gh} dz + h (dv + \gamma v dt) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.76)$$

Первые уравнения (6.75) и (6.76) не зависят от γ . Эти уравнения

$$\left. \begin{aligned} s &= (u + \sqrt{gh}) t + \alpha, \\ s &= (u - \sqrt{gh}) t + \beta \end{aligned} \right\} \quad (6.77)$$

остаются теми же для уравнений (6.70). Сравнивая с (2.36), мы видим, что эти уравнения совпадают с уравнениями, определяющими распространение фронтов волн, нарушающих первоначальное установившееся (равномерное) движение в канале. Характеристики (6.77) совпадают с характеристиками этого равномерного движения. Гипотеза „малых амплитуд“ не искажает, как это и можно было ожидать, законов распространения фронтов волн одного направления.

Отнесем уравнения (6.68) и (6.70) к характеристикам. Принимая за независимые переменные α и β , получим:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\gamma}{4\sqrt{gh}} \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha} - \frac{\partial z}{\partial \beta} \right) = 0. \quad (6.78)$$

При отсутствии сил сопротивления, т. е. в случае уравнения (6.70), имеем:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha \partial \beta} = 0. \quad (6.79)$$

Общий интеграл этого последнего уравнения равен:

$$z = f_1(\alpha) + f_2(\beta),$$

где $f_1(\alpha)$ и $f_2(\beta)$ — произвольные функции. Заменяя α и β их значениями из (6.77), получим общее решение уравнения (6.70) в виде:

$$z = f_1[s - (u + \sqrt{gh})t] + f_2[s - (u - \sqrt{gh})t]. \quad (6.80)$$

Решение

$$z = f_1[s - (u + \sqrt{gh})t] \quad (6.81)$$

соответствует прямой волне, а решение

$$z = f_2[s - (u - \sqrt{gh})t] \quad (6.82)$$

— обратной волне. Произвольные функции f_1 и f_2 определяются на основании граничных или начальных данных. Из уравнений (6.81) и (6.82) следует, что волны малой амплитуды и одного направления при отсутствии сил сопротивления перемещаются, не изменяя своей формы. Самое общее неустановившееся движение в канале, определяемое формулой (6.80), получается простым сложением некоторой прямой и некоторой обратной волны.

Влияние сил сопротивления на распространение волн малой амплитуды можно изучить, интегрируя уравнение (6.78). Это уравнение есть известное телеграфное уравнение. Различные граничные задачи для этого уравнения могут быть решены методом последовательных приближений, а также методом Римана ([9], т. III, ч. 1, § 499).

В. П. Симонов [27] дал решение задачи о распространении длинной волны одного направления, интегрируя уравнение (6.78) методом последовательных приближений. Непосредственное применение этого метода приводит, однако, к рядам, очень медленно сходящимся и плохо пригодным для вычислений. В. П. Симонову удалось очень удачно перестроить эти ряды так, что они стали сходиться гораздо быстрее. Пользуясь этими рядами, он рассмотрел численный пример, относящийся к распространению волны одного направления. При решении выяснился интересный факт. Упрощение уравнений (6.66) производится путем отбрасывания в этих уравнениях нелинейных членов, которые предполагаются малыми по сравнению с другими, причем такому искажению подвергается не только динамическое уравнение, но и уравнение сплошности. Оказалось, что это искажение сказывается при длительном промежутке времени распространения волны исчезновением ощутительного количества жидкости. Ниже приведем изображение мгновенных профилей волны, соответствующих случаям,

когда уравнение неразрывности нарушается и когда оно остается ненарушенным. Можно, однако, произвести упрощение уравнений Буссинеска, отвечающее упомянутым выше гипотезам, так, чтобы при этом уравнение неразрывности осталось ненарушенным.

Воспользуемся для этого координатами Лагранжа (§ 18). Уравнения Буссинеска при отсутствии сил сопротивления были преобразованы в § 18 к переменным Лагранжа (3.73). Считая, что силы сопротивления пропорциональны первой степени скорости и что коэффициент пропорциональности не зависит от глубины, получим, что динамическое уравнение преобразуется в уравнение

$$gi_0 - \gamma \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{gf}{\beta \left(\frac{\partial s}{\partial a}\right) \left(\frac{\partial s}{\partial a}\right)^3} \frac{\partial^2 s}{\partial a^2} = \frac{\partial^2 s}{\partial t^2},$$

а уравнение непрерывности в уравнение

$$\frac{\partial s}{\partial a} = \frac{f}{F} = \omega,$$

причем $\frac{\partial s}{\partial t} = U$. Если волна соответствует малому подъему, то $\frac{\partial s}{\partial a} = \frac{f}{F}$ близко к единице. Заменяя $\frac{\partial s}{\partial a}$, в соответствии с этим, в коэффициенте при $\frac{\partial^2 s}{\partial a^2}$ единицей и полагая также $\beta \left(\frac{\partial s}{\partial a}\right) = b$, где b есть ширина русла на свободной поверхности при установившемся движении, получим линейное уравнение для определения s :

$$gi_0 - \gamma \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{gf}{b} \frac{\partial^2 s}{\partial a^2} = \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}. \quad (6.83)$$

Для того, чтобы оценить произведенное искажение уравнений, вернемся к старым независимым переменным. Уравнение неразрывности остается неизменным, а динамическое уравнение примет вид:

$$gi_0 - \gamma U - \frac{g}{b} \left(\frac{f}{F}\right)^3 \frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial s}.$$

Мы видим, что искажение динамического уравнения приводит к появлению множителя $\left(\frac{f}{F}\right)^3$ при $\frac{\partial F}{\partial s}$ и к замене $B(F)$ на $b = B(f)$. Это искажение будет тем менее значительным, чем меньше F отличается от f .

Введем теперь новую неизвестную функцию

$$\zeta = 1 - \omega = 1 - \frac{f}{F} \quad (6.84)$$

и новую независимую переменную

$$x = a + ut \quad (6.85)$$

и обозначим через

$$h = \frac{f}{b}$$

среднюю глубину.

Уравнение (6.83), если ввести новую независимую переменную x вместо a (6.85), примет вид:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} + 2u \frac{\partial^2 s}{\partial x \partial t} + (u^2 - gh) \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \gamma \left(\frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} \right) - gi_0 = 0. \quad (6.86)$$

Уравнение неразрывности примет вид:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = 1 - \zeta. \quad (6.87)$$

Дифференцируя уравнение (6.86) по x и заменяя $\frac{\partial s}{\partial x}$ выражением из (6.87), получим:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + 2u \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial t} + (u^2 - gh) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \gamma \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) = 0. \quad (6.88)$$

Выясним физический смысл функции ζ . Имеем:

$$\zeta = 1 - \frac{f}{F} \approx 1 - \frac{f}{f + bz} = 1 - \frac{1}{1 + \frac{z}{h}} = \frac{z}{h} - \frac{z^2}{h^2} + \dots$$

Таким образом ζ с точностью до малых величин высших порядков равно отношению подъема уровня над ординаром к первоначальной глубине в канале.

Уравнение (6.88) по внешнему виду в точности совпадает с уравнением (6.68). Однако между этими уравнениями существует большая разница. Координата x в уравнении (6.88) не есть координата места, она совпадает с координатой Лагранжа при $u = 0$. Если перейти от уравнения (6.88) к уравнению (6.68), то надо пренебречь при этом смещениями частиц. Когда рассматривают периодические решения уравнения (6.70), то замена x на s и ζh на z не вносит значительной погрешности, так как частицы при этом колеблются вокруг некоторых средних положений. Однако при изучении поступательных волн эта замена может вызвать значительную погрешность.

В. П. Симонов рассмотрел следующий пример. Канал прямоугольного сечения с горизонтальным дном наполнен покоящейся жидкостью. Глубина жидкости в канале $h = 200$ см. В момент $t = 0$ в некотором сечении, которое принимается за начальное, высота уровня начинает изменяться так, что подъем уровня над ординаром изменяется по закону

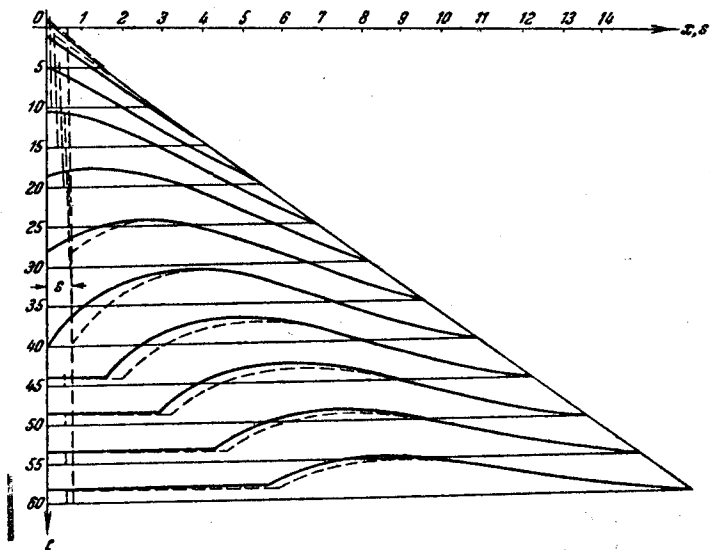
$$z = -\frac{t^2}{48\,000} + \frac{t}{20}. \quad (6.89)$$

При $t = 0$ $z = 0$ и при $t = 2400$ сек. $z = 0$. При $t = 1200$ сек. подъем уровня достигает наибольшего значения, равного $z_{\max} = 30$ см. После этого расход в начальном сечении становится равным нулю (точнее, расход весьма близок к нулю). Распространение волны рассматривается в течение часа. Коэффициент сопротивления γ выбран равным ($C = 47.5$)

$$\gamma = \frac{gu_{\text{ср}}}{C^2 h} = 0.0013 \text{ сек.}^{-1}$$

Отсылая желающих ознакомиться с вычислениями к работе В. П. Симонова [27], приведем лишь некоторые результаты вычислений.

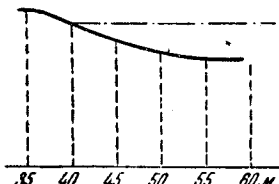
На фиг. 74 показан ряд мгновенных профилей волны, причем пунктиром изображены мгновенные профили, вычисленные на основании уравне-



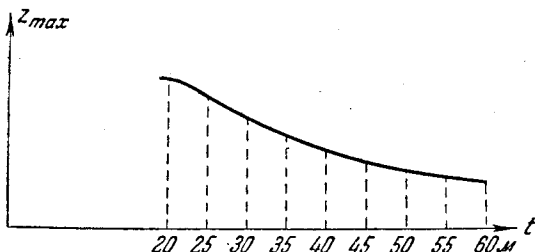
Фиг. 74.

ния (6.68), а сплошными линиями показаны мгновенные профили, полученные решением уравнения (6.88). Разность площадей, занимаемых этими профилями, дает количество исчезнувшей жидкости.

На фиг. 75 кривая изображает площади мгновенных профилей, обведенных пунктиром в различные моменты времени, а прямая — площади профилей, обведенных сплошной линией. Разность ординат дает количество исчезнувшей жидкости.



Фиг. 75.



Фиг. 76.

На фиг. 76 дано изменение наибольшей глубины волны с течением времени. Это изменение характеризует расплывание волны под влиянием сил сопротивления. В заключение отметим, что при расчете волн малой амплитуды в случае, когда учитывается влияние сил сопротивления, лучше всего пользоваться приближенными методами, изложенными в гл. гл. 5 и 6. При этом надо воспользоваться уравнениями характеристик (6.75) и (6.76).