

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ  
РАЗРУШЕНИЕ ВОЛН

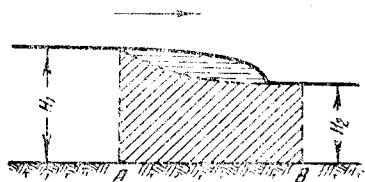
§ 19. Прерывная волна

До сих пор мы рассматривали волны до момента их разрушения. Напомним, что явление разрушения волны характеризуется тем, что некоторые из производных  $\frac{\partial H}{\partial s}$ ,  $\frac{\partial H}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial U}{\partial s}$  и  $\frac{\partial U}{\partial t}$ , а может быть и все они вместе, обращаются в бесконечность. Вблизи места разрушения движение жидкости перестает быть медленно изменяющимся; мгновенный профиль волны становится все более и более крутым и, наконец, происходит опрокидывание волны. Вид мгновенного профиля вблизи места разрушения для различных типов волн рассмотрен в § 14. После опрокидывания волны в русле возникают новые волны, причем в большинстве случаев возникает так называемая прерывная волна.

Мы начнем изучение явления разрушения волн с рассмотрения прерывной волны. Прерывная волна была впервые изучена Риманом [23] применительно к задаче об одномерном движении газа. Распространение прерывной волны в канале прямоугольного сечения было рассмотрено Релеем [22] (см. также Lamb [18]). Уравнения движения прерывной волны гидравликам были известны задолго до работ Релея и Римана. Эти уравнения представляют собой не что иное, как уравнения Беланже (§ 4) в теории прыжка.

В гл. 2 при изучении распространения фронтов волн мы ограничились случаем, когда вдоль фронта волны производные  $\frac{\partial H}{\partial s}$ ,  $\frac{\partial H}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial U}{\partial s}$ ,  $\frac{\partial U}{\partial t}$  терпят

разрыв непрерывности, оставаясь вместе с тем ограниченными. В этом случае закон распространения фронта волны отвечает характеристике того неустановившегося или установившегося движения, которое нарушается данной волной.



Фиг. 44.

Если вдоль фронта волны производные от  $U$  и  $H$  по  $s$  и  $t$  обращаются в бесконечность, то вблизи фронта волны движение жидкости уже не является медленно изменяющимся. Такие волны мы будем называть прерывными волнами. Прерывные волны наблюдаются в каналах и реках и носят название „бора“, „маскаре“ и т. д.

Рассмотрим распространение такой волны, имеющей характер бора или маскаре (фиг. 44). На сравнительно небольшом участке  $AB$ , прилегающем

к фронту волны, происходит очень быстрое изменение скорости и глубины и, как показывает опыт, значительная диссипация энергии. Вне участка  $AB$  движение жидкости можно считать медленно изменяющимся и удовлетворяющим условиям, при которых справедливы уравнения (1.15) или уравнения (2.1).

Обозначим через  $\theta$  скорость распространения фронта прерывной волны и отметим индексами „1“ и „2“ величины, относящиеся к движению жидкости слева и справа от этого фронта (фиг. 44). Для наблюдателя, который перемещается со скоростью  $\theta$ , фронт прерывной волны будет казаться неподвижным, а происходящее вблизи этого фронта явление будет носить характер прыжка (§ 4). Это явление будет отличаться от явления прыжка лишь тем, что движение жидкости на участке, окружающем фронт прерывной волны, будет изменяться с течением времени, так что высота прыжка будет в общем случае переменной.

В дальнейшем мы будем считать, что это изменение происходит настолько медленно, что при изучении рассматриваемого явления можно применять уравнения § 4, относящиеся к гидравлической теории прыжка. Мы будем предполагать таким образом, что кроме указанного условия соблюдены также условия, при которых справедлива гидравлическая теория прыжка (§ 4). В частности, в случае селевого потока (поток, распространяющийся в сухом ложе) мы не имеем оснований считать, что упомянутые условия выполнены.

Обозначим:

$$V_1 = U_1 - \theta, \quad V_2 = U_2 - \theta. \quad (4.1)$$

Уравнение непрерывности, выражающее равенство расходов в относительном движении, будет иметь вид:

$$F_1 V_1 = F_2 V_2 = -Q. \quad (4.2)$$

Отметим, что  $Q$  представляет собой расход лишь для подвижного наблюдателя.

В качестве динамического уравнения (уравнение количества движения) мы получим уравнение (1.34) § 4:

$$V_1^2 F_1 - V_2^2 F_2 = g[P(H_2) - P(H_1)]. \quad (4.3)$$

Определяя из уравнения (4.2)  $\theta$ , получим:

$$\theta = \frac{F_1 U_1 - F_2 U_2}{F_1 - F_2}. \quad (4.4)$$

Исключая  $\theta$  из уравнения (4.3), получим:

$$\frac{F_1 F_2}{F_1 - F_2} \frac{(U_1 - U_2)^2}{g} = P(H_1) - P(H_2). \quad (4.5)$$

В § 4 была показана невозможность существования в призматическом русле прыжка понижения. Из этого доказательства следует также невозможность существования прерывных волн понижения. Впервые невозможность существования прерывных волн понижения была указана Релеем [22]. При доказательстве этого утверждения Релей не опирался на теорию прыжка.

Невозможность существования прерывных волн понижения становится особенно ясной, если вспомнить характер волн одного направления (§ 6). Волна

повышения с течением времени становится все более и более крутой и при разрушении этой волны возникает прерывная волна повышения. Эта волна будет устойчива. Наоборот, волны понижения с течением времени все более и более сглаживаются. Если бы возникла прерывная волна понижения, то она была бы неустойчива, — при малейшем отклонении она превратилась бы в непрерывную волну понижения и быстро сгладилась бы.

Рассмотрим теперь более подробно уравнения (4.5) и (4.4). При дальнейших исследованиях мы ограничимся руслами параболического сечения, для которых в силу (1.16)

$$P(H) = \frac{A}{n+1} H^{n+1}.$$

Допустим также, что  $U_2 = \text{const}$  и  $H_2 = \text{const}$ , т. е. что прерывная волна нарушает равномерное движение.

В рассматриваемом случае

$$\lambda = 2\sqrt{gnH}; \tag{2.18}$$

обозначим  $\lambda_2 = 2\sqrt{gnH_2}$  и  $\lambda_1 = 2\sqrt{gnH_1}$ .

Уравнение (4.5) можно переписать в виде

$$(U_1 - U_2)^2 = \frac{1}{4n(n+1)} \left( \frac{\lambda_1^{2n+2}}{\lambda_2^{2n}} + \frac{\lambda_2^{2n+2}}{\lambda_1^{2n}} - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 \right). \tag{4.6}$$

Если в уравнении (4.5) или (4.6) заменить  $U_1$  и  $H_1$  их выражениями через  $\xi$  и  $\eta$  (3.3), то в плоскости  $\xi\eta$  это уравнение изобразится в виде некоторой кривой, проходящей через точку  $U = U_2$ ,  $H = H_2$ . Обозначим через  $\phi$  правую часть уравнения (4.6). Непосредственно можно проверить, что

$$\frac{d\phi}{d\lambda_1} > 0, \quad \frac{d^2\phi}{d\lambda_1^2} > 0 \quad \text{и} \quad \frac{d^3\phi}{d\lambda_1^3} > 0$$

при  $\lambda_1 > \lambda_2$ .

Решая уравнение (4.6) относительно  $U_1$ , получим:

$$U_1 = \pm\sqrt{\phi} + U_2. \tag{4.7}$$

Обе ветви этой кривой (фиг. 45) расположены симметрично относительно прямой  $U = U_2$ . Рассмотрим ветвь, отвечающую  $+\sqrt{\phi}$ .

Дифференцируя (4.7), получим:

$$\frac{dU_1}{d\lambda_1} = \frac{\phi'}{2\sqrt{\phi}}; \quad \frac{d^2U_1}{d\lambda_1^2} = \frac{2\phi\phi'' - \phi'^2}{4\sqrt{\phi^3}}.$$

Замечая, что при  $\lambda_1 = \lambda_2$   $2\phi\phi'' - \phi'^2 = 0$  и что  $(2\phi\phi'' - \phi'^2)' = 2\phi\phi''' > 0$  при  $\lambda_1 > \lambda_2$ , заключаем, что

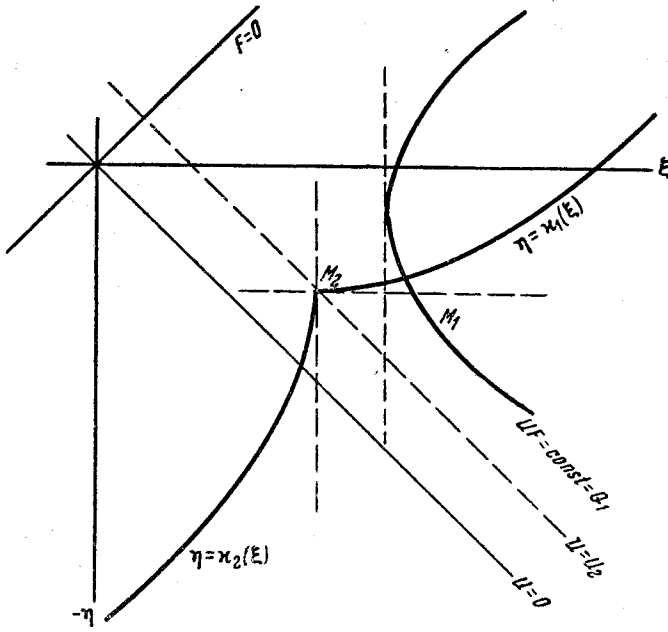
$$\frac{dU_1}{d\lambda_1} > 0 \quad \text{и} \quad \frac{d^2U_1}{d\lambda_1^2} > 0$$

при  $\lambda_1 > \lambda_2$ .

Кроме того, из (4.6) следует, что

$$\left. \frac{dU_1}{d\lambda_1} \right|_{\lambda_1 = \lambda_2} = 1.$$

Из предыдущего вытекает, что кривая (4.7) при  $\lambda_1 > \lambda_2$  имеет вид, изображенный на фиг. 45. Эта кривая состоит из двух ветвей. В точке  $M_2(U_2, H_2)$  одна из этих ветвей касается характеристики  $\xi = \text{const}$ , а другая — характери-



Фиг. 45.

стики  $\eta = \text{const}$ . Каждая из этих ветвей пересекается прямыми, параллельными осям координат, только в одной точке.

В дальнейшем мы будем обозначать через

$$\eta = \kappa_1(\xi) \quad (4.8)$$

ту ветвь кривой (4.7), которая касается в точке  $M_2$  прямой  $\eta = \eta_2$ , а через

$$\eta = \kappa_2(\xi) \quad (4.9)$$

другую ветвь этой кривой.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть в канале существует равномерное движение  $(U_2, H_2)$ . Трением мы будем пренебрегать, дно канала будет горизонтально. Пусть в некотором сечении канала расход внезапно увеличивается от значения  $Q_2 = U_2 F_2$  до значения  $Q_1 > Q_2$  и затем остается постоянным. Тогда в канале возникает неустановившееся движение, распространяющееся в виде прерывной волны. Допустим, что  $Q_1 > 0$ , т. е. что этот расход отвечает распространению жидкости в сторону положительных значений  $s$ . Для определения прерывной волны надо найти точку пересечения кривой

$$UF = Q_1 \quad (4.10)$$

и кривой (4.8). Если  $Q_1 < 0$ , то надо было бы определить пересечение кривых (4.10) и (4.9). Кривые (4.8) и (4.10) пересекаются только в одной точке (фиг. 45). Точка  $M_1$  пересечения этих кривых определяет глубину и среднюю

скорость прерывной волны. Неустановившееся движение в канале представляет собой два участка: один с равномерным движением ( $U_2, H_2$ ), а другой с равномерным движением ( $U_1, H_1$ ) (фиг. 44). Фронт прерывной волны, отделяющий эти два участка, распространяется со скоростью, определяемой уравнением (4.4). Аналогичная задача была решена в конце § 6.

### § 20. Волны, возникающие при разрушении плотины

Задача о разрушении плотины является одной из простейших задач, в которой приходится иметь дело с прерывной волной [34]. В дальнейшем мы будем пренебрегать силами гидравлических сопротивлений и будем пользоваться уравнениями (2.1). Мы предположим также, что канал имеет параболическое сечение.

Допустим, что в сечении  $s=0$  канал перегорожен плотиной (фиг. 47). Направим ось  $s$  в сторону нижнего бьефа и обозначим через  $H_1$  и  $U_1$  глубину и среднюю скорость в верхнем бьефе, через  $H_2$  и  $U_2$  — глубину и среднюю скорость в нижнем бьефе.

Принимая во внимание (1.16), получим:

$$U_1 H_1^n = U_2 H_2^n. \quad (4.11)$$

Мы предположим сначала, что плотина разрушается полностью. В результате разрушения плотины возникает неустановившееся движение, распространяющееся как в нижнем, так и в верхнем бьефе.

Переходя к определению этого неустановившегося движения, напомним, что уравнения (2.1) имеют интегралы, отвечающие установившемуся движению

$$\begin{aligned} U &= \text{const}, \\ H &= \text{const} \end{aligned}$$

и волне одного направления, т. е., согласно нашей терминологии, волне, сопрягающейся с установившимся движением. Уравнения обратной волны, сопрягающейся с установившимся движением ( $U_1, H_1$ ), будут, принимая во внимание (2.18), (2.19) и (2.12):

$$\left. \begin{aligned} U &= -2\sqrt{gnH} + 2\sqrt{gnH_1} + U_1, \\ s &= -\left(\frac{2n+1}{\sqrt{n}}\sqrt{gH} - 2\sqrt{gnH_1} - U_1\right)t + \varphi_*(H). \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

Мы будем различать два случая в зависимости от того, соответствует ли движение в нижнем бьефе спокойному или бурному течению. Предположим сначала, что движение жидкости в нижнем бьефе соответствует спокойному состоянию потока. Точка  $M(U_2, H_2)$  расположена в плоскости  $\xi\eta$  в части ее, определяемой неравенствами:

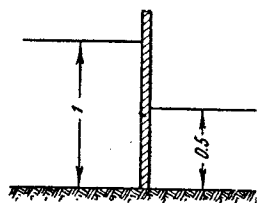
$$\left. \begin{aligned} (1 + \mu)\xi + (1 - \mu)\eta &< 0, \\ (1 - \mu)\xi + (1 + \mu)\eta &> 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

Проведем в плоскости  $\xi\eta$  (фиг. 46) линию равного расхода

$$FU = F_2 U_2 > 0.$$



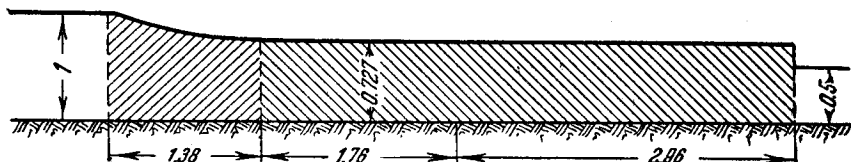
В плоскости  $\xi\eta$  обратная волна изображается отрезком прямой  $\xi = \xi_1$ , проходящей через точку  $M_1$ . Глубина и скорость вдоль фронта прерывной волны, распространяющейся в нижнем бьефе, изображаются в плоскости  $\xi\eta$  точкой на кривой (4.8), проходящей через точку  $M_2$ . Эта глубина и скорость вдоль фронта прерывной волны соответствуют точке  $M_0$  пересечения прямой  $\xi = \xi_1$  и кривой (4.8) (фиг. 46).



Фиг. 47.

На фиг. 47 изображена плотина до разрушения, а на фиг. 48 — мгновенный профиль (через одну секунду), возникающий при полном разрушении плотины. Для определения установившегося движения ( $U_0, H_0$ ), распространяющегося в нижнем бьефе, и обратной волны в верхнем бьефе мы имеем условия сопряжения и начальные условия в момент  $t = 0$ .

В уравнениях обратной волны (4.12) произвольная функция  $\varphi_*(H)$  определяется из начальных условий. В момент  $t = 0$  неустановившееся дви-



Фиг. 48.

жение, отсечаемое обратной волне, было только в сечении  $s = 0$ . Поэтому при  $t = 0$  и при всех  $H$  из (4.12) должно быть  $s = 0$ , откуда  $\varphi_*(H) = 0$ .

Уравнения обратной волны, распространяющейся в верхнем бьефе, будут:

$$\left. \begin{aligned} U &= -2\sqrt{gH} + 2\sqrt{gnH_1} + U_1, \\ s &= -\left(\frac{2n+1}{\sqrt{n}}\sqrt{gH} - 2\sqrt{gnH_1} - U_1\right)t. \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

Для определения  $U_0, H_0$  и  $\theta$  надо найти точку пересечения прямой  $\xi = \xi_1$  и кривой  $\eta = \chi_1(\xi)$ , т. е. надо решить систему уравнений (4.15) и (4.5). В рассматриваемом случае эта система имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} U &= 2\sqrt{gn}(\sqrt{H_1} - \sqrt{H}) + U_1, \\ \frac{H^n H_2^n (U - U_0)^2}{H^n - H_2^n} \frac{1}{g} &= \frac{1}{n+1} (H^{n+1} - H_2^{n+1}). \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

Исключая из этих уравнений  $U$ , получим:

$$\frac{n+1}{g} H^n [2\sqrt{gn}(\sqrt{H_1} - \sqrt{H}) + U_1 - U_2]^2 = (H^{n+1} - H_2^{n+1}) \left[ \left(\frac{H}{H_2}\right)^n - 1 \right]. \quad (4.17)$$

В частности, для русла прямоугольного сечения ( $n=1$ ) при  $U_1 = U_2 = 0$  имеем:

$$8H(\sqrt{H_1} - \sqrt{H})^2 = (H^2 - H_2^2) \left( \frac{H}{H_2} - 1 \right). \quad (4.18)$$

Решение уравнения (4.17) может быть получено графически с последующим уточнением полученных корней.

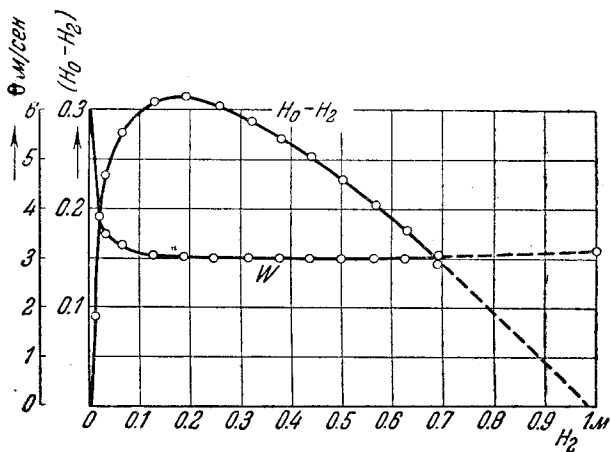
Таблица 2

$H_2$ м	$k = \infty (n = 1)$						$k = 2 (n = \frac{3}{2})$						$k = 4 (n = \frac{5}{4})$					
	$H_0$ м	$U_0$ м/сек	$V$ м/сек	$Q_0$ м <sup>3</sup> /сек	$\Theta$ м/сек		$H_0$ м	$U_0$ м/сек	$V$ м/сек	$Q_0 \sqrt{a}$	$\Theta$ м/сек		$H_0$ м	$U_0$ м/сек	$V$ м/сек	$Q_0 \sqrt{a}$	$\Theta$ м/сек	
0	0	6.26	+ 6.26	0	6.26		0.411	2.755	1.116	0.967	3.311		0.420	2.465	0.649	1.333	3.159	
0.0156	0.103	3.44	+ 2.03	0.698	3.73		0.484	2.332	0.552	1.048	3.071		0.490	2.099	0.137	1.379	3.000	
0.0312	0.262	3.06	+ 1.45	0.801	3.47		0.544	2.012	0.126	1.077	2.922		0.548	1.818	- 0.256	1.372	2.908	
0.0625	0.337	2.63	+ 0.81	0.885	3.23		0.596	1.749	- 0.225	1.073	2.820		0.598	1.586	- 0.581	1.335	2.851	
0.1250	0.429	2.16	+ 0.11	0.927	3.05		0.642	1.522	- 0.527	1.045	2.747		0.644	1.383	- 0.865	1.276	2.814	
0.1875	0.496	1.85	- 0.35	0.919	2.98		0.685	1.320	- 0.797	0.939	2.695		0.686	1.201	- 1.120	1.200	2.788	
0.2500	0.552	1.61	- 0.72	0.888	2.94		0.726	1.136	- 1.042	0.937	2.654		0.726	1.035	- 1.352	1.110	2.775	
0.3125	0.601	1.41	- 1.03	0.846	2.93		0.764	0.967	- 1.269	0.861	2.626		0.764	0.881	- 1.568	1.007	2.767	
0.3750	0.646	1.23	- 1.29	0.794	2.94		0.801	0.807	- 1.481	0.771	2.601		0.801	0.736	- 1.771	0.832	2.764	
0.4375	0.687	1.07	- 1.53	0.736	2.95		0.836	0.658	- 1.680	0.670	2.588		0.836	0.600	- 1.962	0.767	2.764	
0.5000	0.727	0.92	- 1.75	0.671	2.96		0.870	0.516	- 1.870	0.558	2.580		0.870	0.470	- 2.144	0.632	2.765	
0.5625	0.765	0.79	- 1.95	0.601	2.97		0.903	0.380	- 2.051	0.435	2.582		0.904	0.345	- 2.318	0.487	2.770	
0.6250	0.801	0.66	- 2.14	0.527	3.00		0.937	0.247	- 2.228	0.298	2.547		0.936	0.226	- 2.484	0.334	2.786	
0.6875	0.836	0.53	- 2.33	0.448	3.01		1.000	0	- 2.56	0	2.56		1.000	0	- 2.799	0	2.799	
0.7500																		
0.8125																		
0.8750																		
1.000	1.000	0	- 3.13	0	3.13		1.000	0	- 2.56	0	2.56		1.000	0	- 2.799	0	2.799	



В табл. 2 приведены результаты вычислений (в случае  $U_1 = U_2 = 0$ ) для русел прямоугольного сечения и русел, сечение которых ограничено параболлами второй и четвертой степени. Глубина верхнего бьефа  $H_1$  принята за единицу.

$V$  обозначает скорость перемещения границы, отделяющей обратную волну от установившегося движения ( $U_0, H_0$ ), а  $Q_0$  — расход, соответствующий этому установившемуся движению. На фиг. 48 в соответственном масштабе изображен мгновенный профиль через 1 сек. после момента разрушения плотины. На фиг. 49 даны графики зависимости  $\theta$  и  $H_0 - H_2$  от  $H_2$  (для случая прямоугольного сечения). На этих графиках видно, что  $H_0$  и  $\theta$  изменяются очень резко, когда  $H_2$  изменяется в пределах от 0 примерно до 0.05, т. е. в случае, когда в нижнем бьефе почти полностью отсутствует вода.



Фиг. 49.

Как было отмечено выше, в этом случае нет оснований считать полученные уравнения применимыми. Таким образом, при использовании табл. 2 надо во всяком случае ограничиться значениями  $H_2 > 0.05$ .

Заметим, что при  $H_2 = H_1 = 1$  скорость распространения возмущения становится равной скорости распространения фронта волны одного направления.

При переходе к другим масштабам и увеличивая  $H_1$  в  $m$  раз, надо  $H_2$  и  $H_0$  также увеличить в  $m$  раз, а  $U, V$  и  $\theta$  — в  $\sqrt{m}$  раз. Если ширину русла также увеличить в  $m$  раз, то расход увеличится при этом в  $m^2 \sqrt{m}$  раз.

Заметим, что закон движения границы, отделяющей обратную волну от установившегося движения ( $U_0, H_0$ ), получается из второго уравнения (4.15). Полагая в этом уравнении  $H = H_0$ , получим для скорости перемещения этой границы следующее выражение:

$$V = -\frac{2n+1}{Vn} \sqrt{gH_0} + 2\sqrt{gnH_1} + U_1.$$

С возрастанием  $H_0$   $V$  убывает. При  $V \geq 0$  глубина в сечении  $s = 0$  имеет постоянное значение, равное

$$H_* = \frac{(2\sqrt{gnH_1} + U_1)^2 n}{g(2n+1)^2}, \tag{4.19}$$

как это следует из второго уравнения (4.15).

При  $U_1 = 0$

$$H_* = 4 \left( \frac{n}{2n+1} \right)^2 H_1,$$

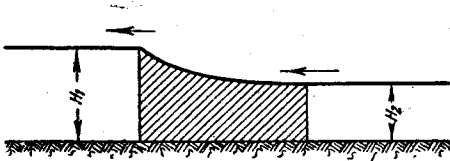
соответствующая средняя скорость равна

$$U_* = \frac{2}{2n+1} \sqrt{gnH_1}, \quad (4.20)$$

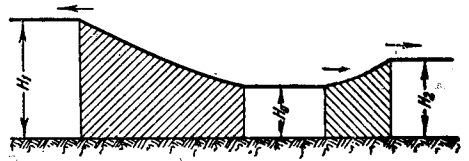
соответствующий расход равен  $F_* U_*$ , где  $F_*$  определяется из формулы (1.16). При  $H_* = H_0$   $V = 0$ . При  $V < 0$  глубина и расход в сечении  $s = 0$  соответствуют установившемуся движению  $(U_0, H_0)$ .

Случай прямоугольного русла при  $H_2 = 0$  был рассмотрен Риттером [24], однако как раз в этом случае (селевой поток) нельзя, считая движение одномерным, получить правильную картину движения жидкости в нижнем бьефе.

Если первоначальное установившееся движение в нижнем бьефе соответствует бурному состоянию потока, то точка  $M_2$ , изображающая это установившееся движение в плоскости  $\xi\eta$ , расположена на ветви  $NK$  (фиг. 46) кривой (4.13). Надо различать три случая в зависимости от расположения точки  $M_1$ , отвечающей установившемуся движению в верхнем бьефе. Если точка  $M_1$  расположена на кривой (4.13) так, что  $\xi_1 > \xi_2$ , то после разрушения плотины возникнет такое же неустановившееся движение, которое только что было рассмотрено для случая спокойного течения в нижнем бьефе. Обратная волна понижения, распространяющаяся в верхнем бьефе, изобразится в плоскости  $\xi\eta$  отрезком прямой  $\xi = \xi_1$ , а установившееся движение, распространяющееся в нижнем бьефе, определится пересечением этой прямой с кривой (4.8), проходящей через точку  $M_2$ . Если  $\xi_1 = \xi_2$ , то в нижнем бьефе не возникнет прерывной волны. После разрушения плотины возникнет только волна понижения, распространяющаяся в верхнем бьефе. Эта волна заканчивается установившимся движением  $(U_2, H_2)$  (фиг. 50).



Фиг. 50.



Фиг. 51.

Если же  $\xi_1 < \xi_2$ , то после разрушения плотины возникнет неустановившееся движение, состоящее из двух волн понижения. Одна из этих волн распространяется в верхнем бьефе, а другая в нижнем бьефе. На фиг. 46 эти волны изображаются отрезками  $M_1^*D$  прямой  $\xi = \xi_1$  и  $M_2^*D$  прямой  $\eta = \eta_2$ .

Так как в начальный момент при всех  $H$ , как для прямой, так и для обратной волны,  $s = 0$ , то уравнения этих волн будут:

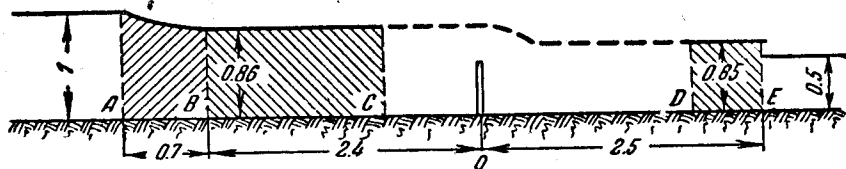
$$\begin{aligned} U &= -2\sqrt{gn}(\sqrt{H} - \sqrt{H_1}) + U_1, \\ s &= -\left(\frac{2n+1}{\sqrt{n}}\sqrt{gH} - 2\sqrt{gnH_1} - U_1\right)t, \\ U &= 2\sqrt{gn}(\sqrt{H} - \sqrt{H_2}) + U_2, \\ s &= \left(\frac{2n+1}{\sqrt{n}}\sqrt{gH} - 2\sqrt{gnH_2} + U_2\right)t. \end{aligned}$$

Мгновенный профиль после разрушения плотины имеет вид, изображенный на фиг. 51. Обе волны заканчиваются установившимся движением, изображенным на фиг. 46 точкой  $D$ . Заметим, что фронт, отделяющий обратную волну в верхнем бьефе от установившегося движения ( $U_0, H_0$ ), сносится вниз по течению.

### § 21. Волны, возникающие при частичном разрушении плотины

В заключение остановимся на случае, когда происходит только частичное разрушение плотины. Разрушение плотины может состоять в том, что в теле плотины образуется отверстие или щель, или разрушается верхняя часть плотины, причем образуется затопленный или незатопленный водослив.

При частичном разрушении плотины также возникает неустановившееся движение, распространяющееся как в нижнем, так и в верхнем бьефе. Мгновенный профиль этого неустановившегося движения, относящийся к случаю, когда в том месте, где расположена плотина, образуется затопленный водослив, схематически изображен на фиг. 52 (плотина до разрушения изображена на фиг. 47).



Фиг. 52.

Участок  $AB$  соответствует обратной волне, распространяющейся в верхнем бьефе; участок  $BC$  — установившемуся движению ( $U_3, H_3$ ); участок  $DE$  — также установившемуся движению ( $U_0, H_0$ ). На участке  $COD$  движение жидкости, конечно, не может считаться одномерным. Наше допущение состоит в том, что движение жидкости между сечениями  $C$  и  $D$  есть установившееся движение, отвечающее истечению жидкости через затопленный водослив (в других случаях — истечению из отверстия, из щели и т. д.).

Длину участка  $COD$  нельзя получить на основании тех исследований, которые мы производим. Кроме того, движение, изображенное на фиг. 52, возникает, конечно, не сразу, а через некоторый промежуток времени после разрушения плотины.

Обычно гидравлические формулы, описывающие истечение жидкости через отверстие или через водослив, выражают расход в зависимости от глубин слева и справа от отверстия. Эту зависимость в общем случае можно записать в виде

$$f(H_3, U_3, H_0) = 0.$$

Функция  $f$  включает параметры, определяющие размеры отверстия или водослива, и эмпирические коэффициенты.

Для определения  $H_3, U_3, U_0, H_0$  и  $\theta$  мы имеем систему пяти уравнений, выражающих условия сопряжения отдельных частей неустановившегося движе-

ния. Если ограничиться руслами прямоугольного сечения и случаем  $U_1=U_2=0$ , то эта система будет:

$$\left. \begin{aligned} (\theta - U_0)H_0 &= \theta H_2, \\ \frac{g}{2} (H_0^2 - H_2^2) &= \theta H_2 U_0, \\ f(H_3, U_3, H_0) &= 0, \\ H_3 U_3 &= H_0 U_0, \\ U_3 &= 2\sqrt{gH_1} - 2\sqrt{gH_3}. \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

Исключая из этих уравнений  $\theta$ ,  $U_3$  и  $U_0$ , мы получим для определения  $H_3$  и  $H_0$  следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{H_0}{H_2} (H_0 + H_2) (H_0 - H_2)^2 &= 8H_3^2 (\sqrt{H_1} - \sqrt{H_3})^2, \\ f(H_3, 2\sqrt{gH_1} - 2\sqrt{gH_3}, H_0) &= 0. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Решение системы (4.22) может быть произведено графическим путем. В качестве примера нами проведены вычисления для нескольких случаев, соответствующих образованию в том месте, где находится плотина, незатопленного и затопленного водослива.

В случае незатопленного водослива ([29], стр. 393) мы пользовались формулой:

$$Q^* = H_3 U_3 = \mu (H_3 - l) \sqrt{2g(H_3 - l)},$$

причем для коэффициента  $\mu$  были взяты значения, полученные на основании опытов Базена, а  $l$  обозначает высоту плотины. Для случая затопленного водослива мы пользовались формулой

$$Q = \eta Q^*,$$

где  $Q^*$  соответствует случаю незатопленного водослива. Коэффициент  $\eta$  взят также на основании опытов Базена ( $\eta$  зависит от  $H_3$ ,  $H_0$  и  $l$ ).

Таблица 3

$H_1$ м	$H_3$ м	$Q$ м <sup>3</sup> /сек	$V$ м/сек	$V^*$ м/сек
0.6	0.55	0.11	-2.1	-2.43
0.8	0.68	0.30	-2.1	-2.80
0.1	0.80	0.53	-2.1	-3.13

Для незатопленного водослива мы взяли  $l=0.4$  м. Результаты вычислений, относящиеся к этому случаю, приведены в табл. 3, где  $V^*$  обозначает скорость распространения фронта волны в верхнем бьефе, а  $V$ —скорость фронта, отделяющего эту волну от установившегося движения. Зная расход  $Q$  и глубину  $H_2$  в нижнем бьефе, нетрудно из первых двух уравнений (4.21) вычислить  $\theta$  и  $H_0$ .

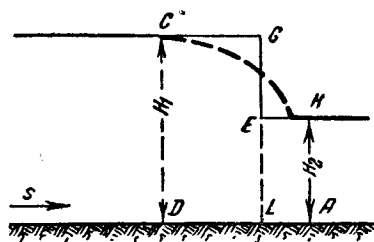
В табл. 4 приведены результаты вычислений, относящиеся к некоторым случаям, когда в сечении  $s=0$  образуется затопленный водослив. Приведенные в этой таблице числа имеют погрешность 8–10%, так как точность, с которой даны значения  $\eta$ , незначительна. На фиг. 52 изображен мгновенный профиль через 1 сек. после разрушения.

Таблица 4

$H_1$ м	$H_2=l$ м	$H_0$ м	$H_3$ м	$\Theta$ м/сек	$V$ м/сек	$V^*$ м/сек	$Q$ м <sup>3</sup> /сек
0.5	0.2	0.30	0.40	1.8	-1.5	-2.2	0.18
1	0.3	0.53	0.76	2.7	-1.9	-3.13	0.62
1	0.5	0.65	0.86	2.5	-2.4	-3.13	0.38

§ 22. Начальные условия

Введение прерывной волны позволяет приближенно оценить явление, происходящее при разрушении волны. Рассмотрим мгновенный профиль волны в момент, близкий к моменту разрушения. Вблизи того места, где происходит разрушение волны, глубина и средняя скорость изменяются очень быстро, причем резкое изменение происходит на сравнительно небольшом участке. На фиг. 53 этот участок обозначен  $AD$ . Допустим, что вне этого участка глубина и средняя скорость изменяются очень медленно. Тогда резкое изменение глубины на участке  $AD$  можно заменить внезапным скачком от значений  $U_2, H_2$  в сечении  $AK$  к значениям  $U_1, H_1$  в сечении  $DC$ , так что мгновенный профиль в начальный момент ( $t=0$ ) будет состоять из ломаной  $CGEK$  (фиг. 53).



Фиг. 53.

Движение жидкости вблизи места разрушения волны в течение малого промежутка времени, следующего за моментом разрушения, не будет зависеть от характера движения жидкости вне участка, на котором происходит разрушение волны, а всецело будет определяться условиями на этом участке.

Для того, чтобы яснее представить себе возникновение новых волн после разрушения данной волны, рассмотрим простейшую возможную схему. Допустим, что влево от сечения  $DC$  и вправо от сечения  $AK$  (фиг. 53) существует равномерное движение со скоростями и глубинами соответственно равными  $U_1, H_1$  и  $U_2, H_2$ . Это возможно, конечно, только в том случае, когда трением пренебрегают. Неустановившееся движение, возникающее при разрушении волны, в этих упрощенных предположениях будет определять движение жидкости в начальный момент для произвольной волны. Таким образом мы получим начальные условия, определяющие возникновение волн после разрушения данной волны. В дальнейшем мы снова ограничимся руслами параболического сечения. Это исследование для соответствующей задачи газовой динамики было произведено Риманом [23]:

Допустим для определенности, что положительное направление оси  $z$  выбрано так, как показано на фиг. 53. Начало координат расположено в сечении  $EL$ . В плоскости  $\xi\eta$  точка  $M_1(U_1, H_1)$  отвечает движению жидкости слева от сечения  $EL$ , а точка  $M_2(U_2, H_2)$  — движению справа от сечения  $EL$ .

Мы рассмотрим все возможные случаи, могущие возникнуть в зависимости от различных соотношений глубин и скоростей слева и справа от сечения  $EL$ .

После разрушения в сторону отрицательных значений  $s$  может начать распространяться, в зависимости от начальных данных, либо обратная волна понижения, либо прерывная волна повышения; точно так же после разрушения в сторону положительных значений  $s$  может распространяться либо прерывная волна повышения, либо прямая волна понижения. Таким образом мы имеем четыре различных возможных случая. С двумя из них мы уже познакомились при рассмотрении волн, возникающих при разрушении плотины.

Уравнение обратной волны понижения будет, принимая во внимание (2.18) и (2.19):

$$\left. \begin{aligned} U + 2\sqrt{gnH} &= U_1 + 2\sqrt{gnH_1} = \xi_1, \\ s &= - \left( \frac{2n+1}{\sqrt{n}} \sqrt{gH} - 2\sqrt{gnH_1} - U_1 \right) t, \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

а прямой волны:

$$\left. \begin{aligned} U - 2\sqrt{gnH} &= U_2 - 2\sqrt{gnH_2} = \eta_2, \\ s &= \left( \frac{2n+1}{\sqrt{n}} \sqrt{gH} - 2\sqrt{gnH_2} + U_2 \right) t. \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

Функции  $\varphi_*(H)$  и  $\varphi^*(H)$  тождественно равны нулю, так как при  $t=0$   $s=0$  при всех значениях  $H$  как у прямой, так и у обратной волны.

Прерывные волны соответствуют равномерному движению и изображаются в плоскости  $\xi\eta$  соответственно точками, расположенными либо на кривой  $\eta = \chi_1(\xi)$ , проходящей через точку  $M_2$ , либо на кривой  $\eta = \chi_2(\xi)$ , проходящей через точку  $M_1$  (фиг. 54).

Рассмотрим последовательно различные возможные случаи.

а) Установившееся движение  $(U_1, H_1)$  изображается в плоскости  $\xi\eta$  точкой, расположенной в той части плоскости (фиг. 54), где выполняются условия

$$\xi_1 \geq \xi_2, \quad \eta_1 \leq \chi_1(\xi).$$

В момент  $t > 0$  неустановившееся движение в канале будет состоять из обратной волны понижения (2.12) и заканчиваться установившимся движением, распространяющимся в сторону положительных значений  $s$  в виде прерывной волны. Это установившееся движение изображено на фиг. 54 точкой  $M_0$ . Этот случай был рассмотрен при изучении волн, возникающих при разрушении плотины. Мгновенный профиль волн после разрушения изображен на фиг. 48. В предельном случае, при  $\xi_1 = \xi_2$ , это неустановившееся движение может состоять только из одной волны понижения или, при  $\eta_1 = \chi_1(\xi)$ , из одной прерывной волны (фиг. 44, 50).

б) Точка  $M_1$ , изображающая установившееся движение  $(U_1, H_1)$ , расположена в той части плоскости, где выполняются условия

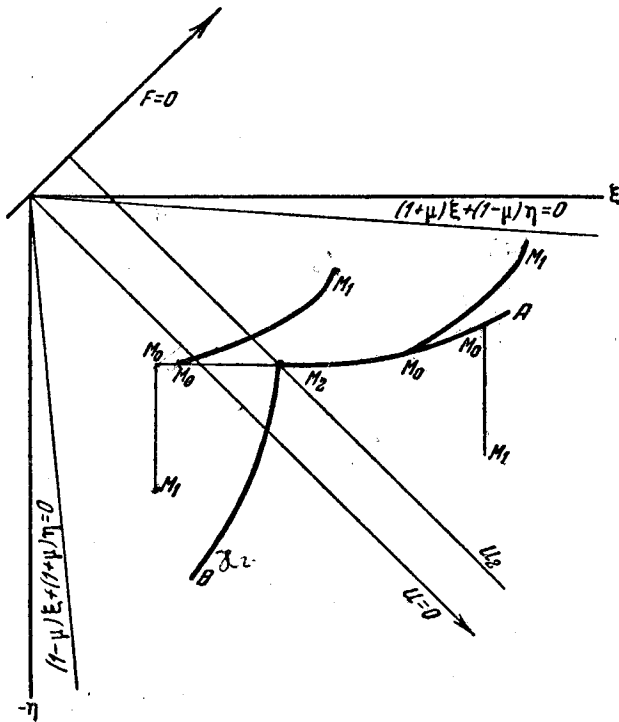
$$\xi_1 < \xi_2, \quad \eta < \eta_2.$$

Неустановившееся движение в момент  $t > 0$  состоит из двух волн понижения (2.12) и (2.10), изображенных на фиг. 54 отрезками  $M_0M_2$  и  $M_0M_1$ . Точка  $M_0$  изображает установившееся движение, которым заканчиваются эти волны. Соответствующий случай был также рассмотрен в задаче о разрушении плотины. Мгновенный профиль волн в момент  $t > 0$  изображен на фиг. 51.

с) Точка  $M_1 (U_1, H_1)$  расположена в области (фиг. 54)

$$\begin{aligned} \eta > \eta_2 & \quad \text{при } \xi < \xi_2, \\ \eta > \chi_1(\xi) & \quad \text{при } \xi > \xi_2. \end{aligned}$$

Неустановившееся движение, возникающее в момент  $t = 0$ , будет иметь различный вид в зависимости от того, пересечет ли кривая  $\eta = \chi_2(\xi)$ , прохо-

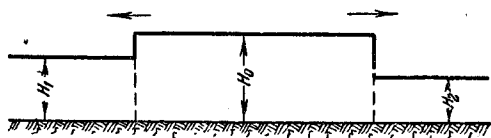


Фиг. 54.

дящая через точку  $M_1$  (фиг. 54), полупрямую  $\eta = \eta_2$   $\xi < \xi_2$  или кривую  $\eta = \chi_1(\xi)$ , проходящую через точку  $M_2$ .

В первом из этих случаев неустановившееся движение в момент  $t > 0$  будет состоять из прямой волны понижения (2.10) и заканчиваться установившимся движением, изображенным на фиг. 54 точкой  $M_0$ . Это установившееся движение распространяется в виде прерывной волны в сторону отрицательных значений  $s$ . Оно совершенно аналогично движению, рассмотренному в случае а).

Во втором случае, когда кривая  $\eta = \chi_1(\xi)$  пересекает кривую  $\eta = \chi_2(\xi)$ , движение в момент  $t > 0$  состоит из установившегося движения, распро-



Фиг. 55.

возникает, например, при отражении прерывной волны от стенки или при встрече двух прерывных волн.

### § 23. Разрушение волны одного направления

Рассмотрим неустановившееся движение, возникающее при разрушении волны одного направления. При решении задачи мы ограничимся случаем параболического русла и предположим, что разрушение волны происходит вблизи ее фронта, т. е. вблизи места сопряжения этой волны с установившимся движением. Направим ось  $s$  в сторону распространения рассматриваемой волны, так что эта волна будет прямой волной, и обозначим через  $f_2$ ,  $h_2$  и  $u_2$  площадь живого сечения, глубину и среднюю скорость того установившегося движения в канале, которое нарушается данной волной. Мы предположим, что волна состоит из простого подъема и снова заканчивается установившимся движением с глубиной  $H_3$ .

Уравнение прямой волны будет (2.10) или, принимая во внимание (2.18) и (2.19),

$$\left. \begin{aligned} U &= 2\sqrt{gnH} - 2\sqrt{gnh_2} + u_2, \\ s &= \left( \frac{2n+1}{\sqrt{n}} \sqrt{gH} - 2\sqrt{gnh_2} + u_2 \right) [t - t_1(H)] + l. \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

Функция  $t_1(H)$  выражает закон изменения высоты уровня в сечении  $s = l$  ( $l < 0$ ). Так как волна отвечает простому подъему уровня, эта функция однозначна. Мы будем считать, что  $t_1(H)$  удовлетворяет условиям, при которых волна разрушается у ее фронта. Мы предполагаем также, что в других частях волны явление разрушения не имеет места в течение всего того времени, когда рассматривается движение этой волны. Условия, которым должна для этого удовлетворять функция  $t_1(H)$ , можно получить из соображений, изложенных в § 6. Момент разрушения мы примем за  $t = 0$ , а место разрушения за  $s = 0$ . В плоскости  $\xi\eta$  (фиг. 56) прямая волна (4.23) изображается отрезком  $M_2M_3$  характеристики

$$\eta = \eta_2 = u_2 - 2\sqrt{gnh_2}.$$

Вблизи того места, где происходит опрокидывание волны (сечение  $s = 0$ ), глубина и скорость на небольшом участке, расположенном вблизи фронта волны, испытывают резкое изменение. Допустим, что на этом участке глубина изменяется в пределах от  $h_2$  до некоторого значения  $H_1$ . Средняя скорость изменяется при этом от значения  $u_2$  до значения

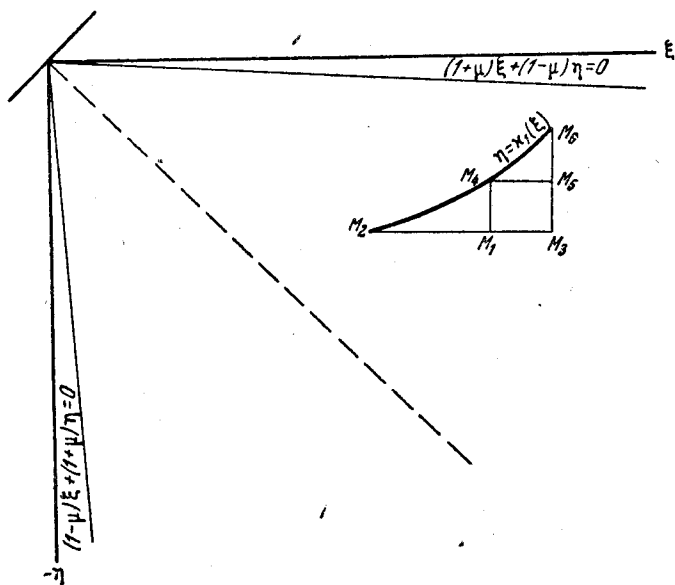
$$U_1 = 2\sqrt{gn}(\sqrt{H_1} - \sqrt{h_2}) + u_2.$$

При решении задачи, следуя общим соображениям, изложенным в § 22, мы будем пренебрегать длиной упомянутого участка и будем считать, что в

страняющегося в виде двух прерывных волн в сторону положительных и отрицательных значений  $s$ . В плоскости  $\xi\eta$  это движение изображается точкой  $M_0$  (фиг. 54). Соответствующий мгновенный профиль изображен на фиг. 55. Это движение



сечении  $s=0$  в момент  $t=0$  глубина и средняя скорость испытывают внезапное изменение от значений  $u_2, h_2$  до значений  $U_1, H_1$ . На всем остальном протяжении волны глубина изменяется очень медленно. В плоскости  $\xi\eta$  точка  $M_1(U_1, H_1)$  расположена на отрезке прямой  $M_2M_3$  (фиг. 56). Проведем через точку  $M_2$  кривую  $\eta = \chi_1(\xi)$  (4.8), соответствующую глубинам и



Фиг. 56.

скоростям у фронта прерывной волны, нарушающей установившееся движение  $(u_2, h_2)$ . Точка  $M_1$  расположена в той части плоскости, где выполняются условия

$$\xi_1 > \xi_2, \quad \eta_1 < \chi(\xi)$$

и, следовательно, имеет место случай а) предыдущего параграфа. В сторону отрицательных значений  $s$  распространяется волна понижения, а в сторону положительных значений  $s$  — прерывная волна. Однако в рассматриваемом случае в отличие от случая, соответствующего разрушению плотины, отдельные части неустановившегося движения уже не отвечают установившемуся движению и волне одного направления и не могут быть получены, при помощи простейших решений дифференциальных уравнений длинных волн.

Определение этого неустановившегося движения может быть произведено путем решения некоторых краевых задач для уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial \xi} &= \frac{1}{2} [(1 + \mu)\xi + (1 - \mu)\eta] \frac{\partial t}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial s}{\partial \eta} &= \frac{1}{2} [(1 - \mu)\xi + (1 + \mu)\eta] \frac{\partial t}{\partial \eta}. \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

Начнем с граничных условий, определяющих волну понижения, распространяющуюся в сторону отрицательных значений  $s$ .

Фронт этой волны распространяется вдоль прямой волны по соответствующей характеристике второго семейства (2.43а)

$$t = \frac{1}{2} \sqrt[4]{\frac{n}{g^2 A^2 H^{2n+1}}} \int_{H_1}^H \{W(H) t_1(H)\}' \sqrt[4]{A^2 n H^{2n-1}} dH, \quad (4.24)$$

где (2.43а)  $\tau$  равно нулю, так как при  $H = H_1$   $t = 0$ , а

$$W(H) = \frac{2n+1}{\sqrt{n}} \sqrt{gH} - 2\sqrt{gnh_2} + u_2.$$

Соответствующие значения  $s$  определяются из второго уравнения (4.23).

Таким образом в плоскости  $\xi\eta$  нам известны значения  $t$  и  $s$  вдоль отрезка  $M_1M_3$  характеристики  $\eta = \eta_2$ . В дальнейшем для простоты мы будем предполагать, что область, которая соответствует рассматриваемому движению, расположена в части плоскости, ограниченной неравенствами

$$\left. \begin{aligned} (1 + \mu)\xi + (1 - \mu)\eta < 0, \\ (1 - \mu)\xi + (1 + \mu)\eta > 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

т. е. мы будем предполагать, что движение соответствует спокойному состоянию потока. Общий случай можно рассмотреть точно таким же образом, переходя к координатам Лагранжа (§ 18).

Если предположить, что в начальный момент ( $t = 0$ ) в части канала  $s < 0$  существует не прямая волна, а установившееся движение с глубиной  $H_1$  и средней скоростью  $U_1$ , то при  $t > 0$  возникло бы неустановившееся движение, соответствующее случаю а) § 22. В сторону  $s < 0$  распространялась бы обратная волна понижения. В плоскости  $\xi\eta$  эта волна изобразилась бы отрезком  $M_1M_4$  характеристики

$$\xi = \xi_1 = U_1 + 2\sqrt{gnH_1}.$$

Произвольная функция, входящая в уравнение обратной волны, определяется из начальных условий, которые состоят в том, что при  $t = 0$   $s = 0$  при всех  $H$  или, что то же, при всех значениях  $\eta$  вдоль отрезка  $M_1M_4$  характеристики  $\xi = \xi_1$ . Уравнение обратной волны, удовлетворяющей этим условиям, было приведено в предыдущем параграфе. Это уравнение будет:

$$\begin{aligned} U + 2\sqrt{gnH} &= \xi_1, \\ s &= - \left( \frac{2n+1}{\sqrt{n}} \sqrt{gH} - 2\sqrt{gnH_1} - U_1 \right) t. \end{aligned}$$

Отметим, что начальные условия отвечают существованию на этом решении особой точки, так как при  $t = 0$  и  $s = 0$

$$\frac{\partial U}{\partial s} = \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial s} = \infty.$$

Если при  $t = 0$  в области  $s < 0$  существует прямая волна, то волна понижения, которая распространяется в сторону  $s < 0$ , при  $t > 0$  уже не будет волной одного направления. Однако в начальный момент вблизи сечения  $s = 0$  движение жидкости не будет зависеть от того, существует ли в области

$s < 0$  прямая волна или установившееся движение, а будет зависеть только от рассматриваемых значений  $u_2, h_2$  и  $U_1, H_1$ . Таким образом в рассматриваемом случае начальные условия выразятся так же, как в задаче о разрушении плотины, а именно: на отрезке  $M_1M_4$  характеристики  $\xi = \xi_1$   $t = 0$  и  $s = 0$ . Из этих условий следует, что при  $\xi = \xi_1$

$$\frac{\partial t}{\partial \eta} = \frac{\partial s}{\partial \eta} = 0,$$

так что при  $\xi = \xi_1$   $\Delta = 0$  [(3.11), (3.12) и (3.13)]. Условие  $\Delta = 0$  соответствует явлению опрокидывания волны и показывает, что начальные условия отвечают существованию особой точки на соответствующем решении уравнений (3.14) (при  $s = 0$  и  $t = 0$   $\frac{\partial U}{\partial s} = \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial F}{\partial t} = \infty$ ).

Для определения волны понижения мы имеем таким образом данные значения  $t$  и  $s$  вдоль характеристик  $M_1M_3$  и  $M_1M_4$  (фиг. 56). Соответствующее решение приведено в § 12. Оно получается в замкнутом виде (3.37). В случае  $\beta = 2, n = \frac{3}{2}$  (русло, соответствующее параболе второй степени) это решение получается в виде

$$t(\xi, \eta) = \left( \frac{\xi - \eta_1}{\xi - \eta} \right)^2 t^*(\xi) + 2 \frac{(\xi - \eta_1)(\eta_1 - \eta)}{(\xi - \eta)^3} \int_{\xi_1}^{\xi} t^*(u) du,$$

где  $t^*(\xi)$  представляет собой заданные значения  $t$  вдоль характеристики  $M_1M_3$ .

Удобный приближенный метод для построения решения будет дан в гл. 5. Решение в плоскости  $\xi\eta$  определено в области прямоугольника  $M_1M_3M_5M_4$ . В этой области

$$\frac{\partial t}{\partial \xi} > 0, \quad \frac{\partial s}{\partial \xi} < 0, \quad \frac{\partial t}{\partial \eta} > 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial s}{\partial \eta} > 0;$$

знаки производных по  $\xi$  совпадают со знаками производных вдоль характеристики  $\eta = \eta_1$  (вдоль прямой волны). Знаки производных по  $\eta$  можно непосредственно определить, дифференцируя уравнение (3.37) по  $\eta$ , полагая затем  $\eta = \eta_1$  и принимая во внимание, что  $t^{*'}(\xi) > 0$ . Эта волна будет, таким образом, волной типа прямой положительной волны (§ 14).

Перейдем теперь к условиям, определяющим прерывную волну.

Если бы в момент  $t = 0$  в части канала  $s < 0$  было бы установившееся движение, то прерывная волна, распространяющаяся в сторону положительных значений  $s$ , соответствовала бы установившемуся движению. В плоскости  $\xi\eta$  это установившееся движение изобразилось бы точкой  $M_4$ , по полученной пересечением характеристики  $\xi = \xi_1$  с кривой  $\eta = \eta_1(\xi)$ , проходящей через точку  $M_2$ . В случае, когда в части канала  $s < 0$  в начальный момент существовала прямая волна, прерывная волна уже не будет соответствовать установившемуся движению. Вдоль характеристики  $M_4M_5$  (фиг. 56) эта волна сопрягается с волной понижения, распространяющейся в сторону отрицательных значений  $s$ .

Вдоль фронта прерывной волны скорости и глубины связаны уравнением (4.5). В плоскости  $\xi\eta$  этому фронту соответствует кривая  $\eta = \eta_1(\xi)$  (4.8), проходящая через точку  $M_2$ .

Пусть

$$\left. \begin{aligned} t &= t(\xi, \eta), \\ s &= s(\xi, \eta) \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

есть решение уравнений (3.14), отвечающее прерывной волне. Вдоль фронта прерывной волны функции (4.25) удовлетворяют соотношению

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\frac{\partial s}{\partial \xi} + \frac{\partial s}{\partial \eta} \alpha'_1(\xi)}{\frac{\partial t}{\partial \xi} + \frac{\partial t}{\partial \eta} \alpha'_1(\xi)} = \theta(\xi), \quad (4.26)$$

где  $\theta(\xi)$  получается из (4.4):

$$\theta = \frac{FU - f_2 u_2}{F - f_2}$$

путем замены  $F$  и  $U$  их выражениями через  $\xi$  (3.3) вдоль кривой  $\eta = \alpha_1(\xi)$ .

Заменяя в уравнении (4.26)  $\frac{\partial s}{\partial \xi}$  и  $\frac{\partial s}{\partial \eta}$  их выражениями из уравнений (3.14), получим:

$$\begin{aligned} & [(1 + \mu)\xi + (1 - \mu)\eta - 2\theta(\xi)] \frac{\partial t}{\partial \xi} + \\ & + [(1 - \mu)\xi + (1 + \mu)\eta - 2\theta(\xi)] \frac{\partial t}{\partial \eta} \alpha'_1(\xi) = 0, \end{aligned} \quad (4.27)$$

или

$$\left[ U - \sqrt{\frac{gF}{B}} - \theta \right] \frac{\partial t}{\partial \xi} + \left[ U + \sqrt{\frac{gF}{B}} - \theta \right] \alpha'_1(\xi) \frac{\partial t}{\partial \eta} = 0. \quad (4.28)$$

Так как по условию точка  $M_1$  расположена в части плоскости  $\xi\eta$ , определяемой неравенствами (3.24), то вдоль кривой  $\eta = \alpha_1(\xi)$  справедливы следующие неравенства:

при  $\xi > \xi_1$

$$U - \sqrt{\frac{gF}{B}} < \frac{FU - f_2 u_2}{F - f_2} \quad (4.29)$$

и

$$U + \sqrt{\frac{gF}{B}} > \frac{FU - f_2 u_2}{F - f_2}. \quad (4.30)$$

Так как вдоль кривой  $\eta = \alpha_1(\xi)$   $U$  и  $F$  возрастают вместе с  $\xi$ , то первое неравенство (4.29) очевидно.

Второе неравенство (4.30) можно, пользуясь (4.5), представить в виде

$$\sqrt{\frac{gF}{B}} > \sqrt{\frac{gf_2}{F(F - f_2)} [P(H) - P(h_2)]}, \quad (4.31)$$

или, выражая все через  $H$ ,

$$\sqrt{\frac{gH}{n}} > \sqrt{\frac{g}{n+1} \left(\frac{h_2}{H}\right)^n \frac{H^{n+1} - h_2^{n+1}}{H^n - h_2^n}}. \quad (4.32)$$

Это последнее неравенство должно иметь место при  $0 \leq h_2 \leq H$ .

Правая часть неравенства (4.32) при  $h_2 = 0$  обращается в нуль. Кроме того, нетрудно проверить, что правая часть неравенства (4.32) возрастает вместе с  $h_2$  и при  $h_2 \rightarrow H$  стремится к  $\sqrt{\frac{gH}{n}}$ . Таким образом второе неравенство (4.30) также имеет место при всех  $\xi > \xi_1$ .

Для определения прерывной волны, распространяющейся в сторону  $s > 0$ , мы пришли к следующей задаче.

Нужно построить решение уравнений (3.14) или уравнения

$$\frac{\partial^2 t}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\beta}{\xi - \eta} \left( \frac{\partial t}{\partial \xi} - \frac{\partial t}{\partial \eta} \right) \quad (3.16)$$

по следующим данным: а) вдоль отрезка  $M_4 M_5$  характеристики  $\eta = \eta_4$  даны значения  $t$  (а также и  $s$ ), б) вдоль кривой  $\eta = \chi_1(\xi)$  неизвестная функция  $t(\xi, \eta)$  удовлетворяет соотношению (4.27). По этим данным соответствующее решение уравнения (3.16) может быть построено в области  $M_4 M_5 M_6$  (фиг. 56). Построение этого решения (4.25) дано нами в работе [35] методом последовательных приближений. Чтобы можно было построить это решение, должно выполняться неравенство (4.30). Это решение легко можно построить при помощи приближенного метода, изложенного в гл. 5.

Вдоль отрезка  $M_4 M_5$   $\frac{\partial t}{\partial \xi} > 0$  и  $\frac{\partial s}{\partial \xi} < 0$ . Из (4.27) следует, что  $\frac{\partial t}{\partial \eta} > 0$ , а из второго уравнения (3.14) при условии (3.24)  $\frac{\partial s}{\partial \eta} > 0$ . Рассматриваемая волна принадлежит, таким образом, к типу прямой волны повышения.

В плоскости  $\xi\eta$  точка  $M_3$  соответствует установившемуся движению, которым заканчивается прямая волна. Точка  $M_6$  изображает то установившееся движение, которое в конце концов будет распространяться в виде прерывной волны в сторону положительных значений  $s$ . По истечении известного промежутка времени неустановившееся движение будет состоять из обратной волны понижения, изображенной на фиг. 56 отрезком  $M_3 M_6$ , и из установившегося движения, изображенного на фиг. 56 точкой  $M_6$ . Это движение будет совпадать с неустановившимся движением, возникающим при разрушении плотины. Если данная волна состоит из ряда последовательных подъемов и понижений уровня, то решение определяется в плоскости  $\xi\eta$  на соответствующей многолистной поверхности. Эта поверхность имеет, очевидно, тот же характер, что и поверхности, рассмотренные в § 15. Читатель сам легко рассмотрит этот случай.

Отметим только, что если при понижении уровня у прямой волны, следующем за первоначальным повышением,  $U$  и  $H$  достигают значений  $u_2$  и  $h_2$  или становятся меньше этих значений, то фронт прерывной волны деформируется таким образом, что высота прыжка постепенно уменьшается и при  $t$  и  $s$ , стремящихся к бесконечности, стремится к нулю.