

## ГЛАВА ТРЕТЬЯ

### НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ПРИ ОТСУТСТВИИ СИЛ СОПРОТИВЛЕНИЯ

#### § 10. Основные преобразования

Уравнения неустановившегося движения при отсутствии сил сопротивления (уравнения длинных волн конечной амплитуды)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial s} &= - \frac{g}{B} \frac{\partial F}{\partial s}, \\ \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial(UF)}{\partial s} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

имеют, как это было уже отмечено, полную аналогию с уравнениями одномерного неустановившегося движения газа. Риман [23] первый указал на то, что путем простого преобразования переменных эти уравнения могут быть приведены к линейному виду.

Рассмотрим уравнения характеристик, отвечающие уравнениям (2.1). Первое семейство характеристик определяется уравнениями (2.39), а второе — уравнениями (2.40). Каждая из этих систем уравнений имеет так называемую интегрируемую комбинацию. Интегрируя вторые уравнения (2.39) и (2.40), мы получим уравнения характеристик для (2.1) в виде:<sup>1</sup>

*первое семейство:*

$$\left. \begin{aligned} U + \lambda(F) &= \xi, \\ ds &= \left( U + \sqrt{\frac{gF}{B}} \right) dt; \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

*второе семейство:*

$$\left. \begin{aligned} U - \lambda(F) &= \eta, \\ ds &= \left( U - \sqrt{\frac{gF}{B}} \right) dt, \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

где  $\xi$  и  $\eta$  постоянные, определяющие характеристику.

Преобразуем уравнения (2.1), принимая за неизвестные функции  $\xi$  и  $\eta$  вместо  $U$  и  $F$ .

<sup>1</sup> Все изложенное в настоящей главе относится к любым системам нелинейных уравнений гиперболического типа первого порядка с двумя неизвестными функциями и двумя независимыми переменными, обладающими двумя интегрируемыми комбинациями характеристик. Сюда относятся, например, кроме уравнений одномерного неустановившегося движения газа, уравнения плоского движения газа при сверхзвуковых скоростях и отсутствии вихрей, уравнения теории пластичности, уравнения гидравлического удара и др.

Имеем:

$$U = \frac{1}{2} (\xi + \eta), \quad \lambda(F) = \frac{1}{2} (\xi - \eta), \quad (3.3)$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial s} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial s} + \frac{\partial \eta}{\partial s} \right), & \frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \right), \\ \frac{\partial F}{\partial s} &= \frac{1}{2\lambda(F)} \left( \frac{\partial \xi}{\partial s} - \frac{\partial \eta}{\partial s} \right), & \frac{\partial F}{\partial t} &= \frac{1}{2\lambda(F)} \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial \eta}{\partial t} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Подставляя в уравнения (2.1), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial t} + \left( U + \sqrt{\frac{gF}{B}} \right) \frac{\partial \xi}{\partial s} + \left( U - \sqrt{\frac{gF}{B}} \right) \frac{\partial \eta}{\partial s} &= 0, \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial \eta}{\partial t} + \left( U + \sqrt{\frac{gF}{B}} \right) \frac{\partial \xi}{\partial s} - \left( U - \sqrt{\frac{gF}{B}} \right) \frac{\partial \eta}{\partial s} &= 0, \end{aligned}$$

или, складывая и вычитая:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \left( U + \sqrt{\frac{gF}{B}} \right) \frac{\partial \xi}{\partial s} &= 0, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \left( U - \sqrt{\frac{gF}{B}} \right) \frac{\partial \eta}{\partial s} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

Определитель произведенного преобразования равен

$$\frac{D(F, U)}{D(\xi, \eta)} = \frac{\partial F}{\partial \xi} \frac{\partial U}{\partial \eta} - \frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{BF}{g}}. \quad (3.6)$$

Для того, чтобы привести уравнения (3.5) к линейным уравнениям, примем  $\xi$  и  $\eta$  за независимые переменные, а  $t$  и  $s$  за неизвестные функции.

Формулы преобразования будут:

$$\left. \begin{aligned} t &= t(\xi, \eta), \\ s &= s(\xi, \eta). \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

Дифференцируя (3.7) по  $t$  и  $s$ , получим:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\partial t}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial t}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t}, & 0 &= \frac{\partial t}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial s} + \frac{\partial t}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial s}, \\ 0 &= \frac{\partial s}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t}, & 1 &= \frac{\partial s}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial s} + \frac{\partial s}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial s}. \end{aligned}$$

Решая эту систему относительно  $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial \eta}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial \xi}{\partial s}$  и  $\frac{\partial \eta}{\partial s}$ , получим:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{1}{\Delta^*} \frac{\partial s}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{1}{\Delta^*} \frac{\partial s}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial s} = -\frac{1}{\Delta^*} \frac{\partial t}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial s} = \frac{1}{\Delta^*} \frac{\partial t}{\partial \xi}, \quad (3.8)$$

где

$$\Delta^* = \frac{\partial t}{\partial \xi} \frac{\partial s}{\partial \eta} - \frac{\partial s}{\partial \xi} \frac{\partial t}{\partial \eta}. \quad (3.9)$$

Отсюда, подставляя в (3.5), имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial \eta} &= \left( U + \sqrt{\frac{gF}{B}} \right) \frac{\partial t}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial s}{\partial \xi} &= \left( U - \sqrt{\frac{gF}{B}} \right) \frac{\partial t}{\partial \xi}. \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

Заменяя в (3.9)  $\frac{\partial s}{\partial \xi}$  и  $\frac{\partial s}{\partial \eta}$  их выражениями из (3.10), получим:

$$\Delta^* = 2 \sqrt{\frac{gF}{B}} \cdot \frac{\partial t}{\partial \xi} \frac{\partial t}{\partial \eta}. \quad (3.11)$$

Обозначим через  $\Delta$  определитель преобразования от переменных  $t, s$  к переменным  $U, F$ :

$$\Delta = \frac{D(t, s)}{D(F, U)} = \frac{1}{\frac{\partial F \partial U}{\partial t \partial s} - \frac{\partial U \partial F}{\partial t \partial s}}. \quad (3.12)$$

Пользуясь (3.6), получим

$$\Delta = 2 \sqrt{\frac{g}{BF}} \Delta^*. \quad (3.13)$$

В уравнениях (3.10) нужно заменить  $U$  и  $\sqrt{\frac{gF}{B}}$  их выражениями через  $\xi$  и  $\eta$  из (3.3). Эту замену легко произвести в случае параболических русел. Пользуясь формулой (2.19), получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial \xi} &= \frac{1}{2} [(1 + \mu) \xi + (1 - \mu) \eta] \frac{\partial t}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial s}{\partial \eta} &= \frac{1}{2} [(1 - \mu) \xi + (1 + \mu) \eta] \frac{\partial t}{\partial \eta}, \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

где

$$\mu = -\frac{1}{2n} = -\frac{k}{2(k+1)}. \quad (3.15)$$

Исключая из уравнений (3.14) функцию  $s$ , получим

$$\frac{\partial^2 t}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\beta}{\xi - \eta} \left( \frac{\partial t}{\partial \xi} - \frac{\partial t}{\partial \eta} \right), \quad (3.16)$$

а исключая  $t$ :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\beta}{\xi - \eta} \left( \frac{(1 - \mu) \xi + (1 + \mu) \eta}{(1 + \mu) \xi + (1 - \mu) \eta} \frac{\partial s}{\partial \xi} - \frac{(1 + \mu) \xi + (1 - \mu) \eta}{(1 - \mu) \xi + (1 + \mu) \eta} \frac{\partial s}{\partial \eta} \right), \quad (3.17)$$

где

$$\beta = \frac{2n + 1}{2} = \frac{3k + 2}{2k}. \quad (3.18)$$

Если известно какое-нибудь решение уравнения (3.16), то соответствующая ему функция  $s$  может быть определена из уравнений (3.14) квадратурами. Аналогичное замечание можно сделать и относительно уравнения (3.17).

## § 11. Общее исследование решений

Уравнения (3.10), (3.14), а также (3.16) и (3.17) представляют собой линейные дифференциальные уравнения гиперболического типа. Для решения различных краевых задач для таких уравнений существуют хорошо разработанные методы (см., например, Гурса [9], т. III, гл. XXVI). Прежде чем переходить к решению различных задач на определение неустановившихся движений, мы выясним ряд свойств, относящихся к решениям уравнений (3.10) или (3.14) [35, 36, 33].

Заметим прежде всего, что всякому решению уравнений (2.1) соответствует решение уравнений (3.10). Исключение представляют только те решения, которые тождественно обращают в нуль определитель

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(t, s)} = \frac{1}{\Delta^*}.$$

Пользуясь (3.11) и формулами (3.8), получим:

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(t, s)} = -2 \sqrt{\frac{gF}{B}} \frac{\partial \xi}{\partial s} \frac{\partial \eta}{\partial s}.$$

Отсюда видно, что определитель  $\frac{D(\xi, \eta)}{D(t, s)}$  обращается тождественно в нуль только в трех случаях:

- 1)  $\xi = \text{const}$ ,  $\eta = \text{const}$  или, иначе,  $U = \text{const}$  и  $F = \text{const}$ . Этот случай отвечает, очевидно, установившемуся движению.
- 2)  $\xi = \text{const}$ , т. е.  $U + \lambda(F) = \text{const}$ . Сравнивая с (2.16), мы видим, что  $\xi = \text{const}$  соответствует обратной волне.
- 3)  $\eta = \text{const}$ , т. е.  $U - \lambda(F) = \text{const}$  — этот случай соответствует [прямой волне (2.15).

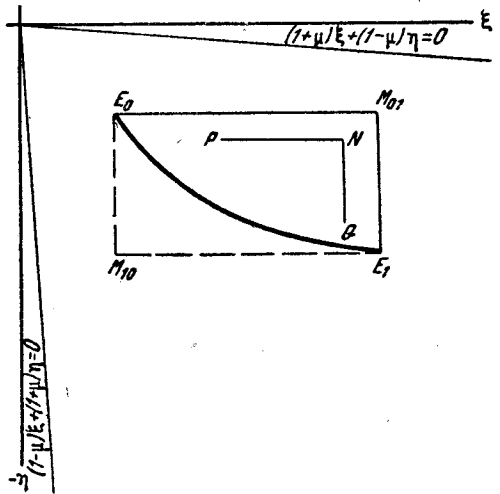
Таким образом, при произведенном преобразовании теряются решения, соответствующие установившемуся движению и волнам одного направления. Все другие решения уравнений (2.1) могут быть получены путем решения уравнений (3.10) или (3.14).

Установившееся движение и волны одного направления можно рассматривать как решение уравнений (3.10), только вводя расширенное определение интеграла дифференциального уравнения, данное Софусом Ли (см., например, Гурса [10], стр. 50).

Рассмотрим в плоскости  $\xi\eta$  (фиг. 14) область, образованную двумя отрезками прямых  $\xi = \text{const}$  и  $\eta = \text{const}$  и некоторой кривой, которая пересекается прямыми, параллельными осям  $\xi$  и  $\eta$ , только в одной точке. Как предельный случай, эта кривая может состоять из двух отрезков прямых  $\xi = \text{const}$  и  $\eta = \text{const}$ . В этом последнем случае рассматриваемая область есть прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат. Эта область всегда расположена в части плоскости, для которой (3.3)

$$\xi - \eta > 0,$$

так как линия  $\xi - \eta = 0$  соответствует нулевой глубине.



Фиг. 14.

Предположим, что в замкнутой области этого вида определено какое-нибудь решение уравнений (3.10)

$$\left. \begin{aligned} t &= t(\xi, \eta), \\ s &= s(\xi, \eta). \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

Напомним, что решением мы называем функции (3.19), имеющие непрерывные первые производные. В дальнейшем, говоря о решении уравнений (3.10), мы будем всегда предполагать, что оно определено в области указанного выше вида.

Уже на исследовании волн одного направления можно было убедиться в том, какое важное значение при изучении неустановившихся движений имеет явление разрушения волны. Соответствующее решение уравнений (2.1) имеет физический смысл только до момента опрокидывания волны. Исследование решений (3.19) мы начнем с установления некоторого необходимого и достаточного условия для разрушения волны, соответствующей этим решениям.

Напомним, что явление разрушения волны характеризуется тем, что хотя бы одна из производных  $\frac{\partial F}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial F}{\partial s}$ ,  $\frac{\partial U}{\partial t}$  и  $\frac{\partial U}{\partial s}$  обращается в бесконечность.

*Теорема III. Необходимым и достаточным условием, определяющим разрушение волны, соответствующей какому-нибудь решению уравнений (3.10), является равенство нулю определителя  $\Delta$  (3.12) [35, 36].*

Достаточность этого условия непосредственно вытекает из формулы (3.12). Необходимость этого условия, принимая во внимание, что, по предположению, производные от  $t$  и  $s$  по  $\xi$  и  $\eta$  ограничены, следует из формул (3.4), (3.8) и равенства (3.13).

Для того, чтобы решения (3.19) имели физический смысл, т. е. для того, чтобы эти решения соответствовали возможным движениям жидкости в канале, необходимо, чтобы функции

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi(t, s), \\ \eta &= \eta(t, s), \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

обратные по отношению к функциям (3.19), были однозначными. Это требование эквивалентно требованию, чтобы каждому сечению канала в каждый момент соответствовала бы определенная глубина и средняя скорость.

*Теорема IV. Если явление разрушения волны не имеет места, т. е. определитель  $\Delta$  отличен от нуля, то функции (3.20), обратные по отношению к функциям (3.19), однозначны.*

Проведем в плоскости  $\xi\eta$  линии

$$U - \sqrt{\frac{gF}{B}} = 0 \quad (3.21)$$

$$U + \sqrt{\frac{gF}{B}} = 0. \quad (3.22)$$

Эти линии ограничивают область

$$\left. \begin{aligned} U - \sqrt{\frac{gF}{B}} &< 0, \\ U + \sqrt{\frac{gF}{B}} &> 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

которая соответствует скоростям и глубинам при спокойном состоянии потока [см. (1.40)].

На фиг. 14 изображен случай, относящийся к параболическим руслам. В этом случае линии (3.21) и (3.22) — прямые, и неравенства (3.23) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} (1 + \mu) \xi + (1 - \mu) \eta < 0, \\ (1 - \mu) \xi + (1 + \mu) \eta > 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

Если область, в которой определено решение (3.19), расположена в части плоскости, ограниченной неравенствами (3.23), то доказательство теоремы очень просто.

Соединим две произвольные точки  $P$  и  $Q$  (фиг. 14), расположенные в рассматриваемой области, ломаной линией  $PNQ$ , составленной из двух отрезков, параллельных осям  $\xi$  и  $\eta$ . Замечая, что при отсутствии разрушения волны производные  $\frac{\partial t}{\partial \xi}$  и  $\frac{\partial t}{\partial \eta}$  не обращаются в нуль в рассматриваемой области, мы убеждаемся, что при любом расположении точек  $P$  и  $Q$  вдоль ломаной  $PNQ$  одна из функций  $t$  или  $s$  изменяется монотонно.

Допустим, например, что  $t$  возрастает на отрезке  $PN$  при перемещении от  $P$  к  $N$  и затем убывает на отрезке  $NQ$  при перемещении из точки  $N$  в точку  $Q$ . Тогда  $\frac{\partial t}{\partial \xi} > 0$  на  $PN$  и  $\frac{\partial t}{\partial \eta} > 0$  на  $NQ$ , но тогда из уравнений (3.10), принимая во внимание неравенства (3.23), следует, что  $\frac{\partial s}{\partial \xi} < 0$  на  $PN$  и  $\frac{\partial s}{\partial \eta} > 0$  на  $NQ$ . Таким образом вдоль ломаной  $PNQ$   $s$  все время убывает и, следовательно,  $s_p < s_q$ , откуда и следует доказываемое утверждение.

Теорема IV справедлива, однако, не только для спокойных течений, но и в общем случае. Полное доказательство этой теоремы будет дано в конце этой главы при рассмотрении координат Лагранжа.

Докажем теперь некоторые свойства характеристик для решений (3.19).

Теорема V. Если провести в плоскости  $(s, t)$  характеристики, отвечающие какому-нибудь решению уравнений (3.10), то вплоть до момента разрушения волны, соответствующей этому решению, характеристики сохраняют постоянное направление вогнутости (или меняют его на определенной линии).

Рассмотрим, например, характеристику  $\xi = \text{const}$ . Угловым коэффициентом касательной вдоль этой характеристики будет (3.1):

$$\frac{ds}{dt} = U + \sqrt{\frac{gF}{B}},$$

или, выражая  $U$  через  $F$  и  $\xi$  при помощи первого уравнения (3.1), получим:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{gF}{B}} - \lambda(F) + \xi.$$

Вдоль характеристики  $\xi = \text{const}$  площадь живого сечения  $F$  есть функция от  $\eta$ :

$$\eta = \xi - 2\lambda(F). \quad (3.25)$$

Вычисляя вторую производную от  $s$  по  $t$  вдоль характеристики  $\xi = \text{const}$ , получим:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \left( \sqrt{\frac{gF}{B}} - \lambda(F) \right)' \frac{dF}{d\eta} \frac{d\eta}{dt}.$$

Отсюда, принимая во внимание, что при  $\xi = \text{const}$  из (3.19)

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{\frac{\partial t}{\partial \eta}},$$

получим:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{F}{B} B' \right) \frac{1}{\frac{\partial t}{\partial \eta}} = \frac{1}{4B} (BF)' \frac{1}{\frac{\partial t}{\partial \eta}}. \quad (3.26)$$

Так как  $\frac{\partial t}{\partial \eta}$  сохраняет свой знак вплоть до момента разрушения волны, то знак (3.26) зависит только от знака  $(BF)'$ . Для всех русел, у которых произведение площади живого сечения на ширину последнего на свободной поверхности возрастает с увеличением глубины, а тем более для русел, у которых сечение расширяется с увеличением глубины (в частности, для параболических русел), характеристики  $\xi = \text{const}$  сохраняют направление своей вогнутости до момента разрушения волны. Если же произведение  $BF$  не изменяется монотонно, то характеристики изменяют направление своей вогнутости, когда  $BF$  переходит через максимум или минимум, т. е. когда

$$(BF)' = 0. \quad (3.27)$$

Совершенно аналогичные заключения можно сделать относительно характеристики  $\eta = \text{const}$ .

Для определения направления вогнутости имеем вдоль характеристики  $\eta = \text{const}$ :

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{F}{B} B' \right) \frac{1}{\frac{\partial t}{\partial \xi}}. \quad (3.28)$$

Характеристики  $\eta = \text{const}$  для русел, у которых сечение расширяется с увеличением глубины ( $B' > 0$ ), сохраняют направление своей вогнутости вплоть до момента разрушения волны. Для галлерей овального сечения может случиться, что при некоторой глубине будет иметь место равенство (3.27), при этом характеристики изменят направление своей вогнутости.

**Теорема VI.** Если провести в плоскости  $(s, t)$  характеристики, отвечающие какому-нибудь решению уравнения (2.1), то вплоть до момента разрушения волны (соответствующей этому решению), при перемещении вдоль характеристики одного из семейств, угловые коэффициенты характеристик другого семейства изменяются монотонно.

Скорость изменения углового коэффициента характеристик  $\xi = \text{const}$  вдоль характеристики  $\eta = \text{const}$  равна

$$\frac{d}{dt} \left( U + \sqrt{\frac{gF}{B}} \right) = \frac{d}{d\xi} \left[ \lambda(F) + \sqrt{\frac{gF}{B}} \right] \frac{d\xi}{dt},$$

откуда

$$\frac{d}{dt} \left( U + \sqrt{\frac{gF}{B}} \right) = \frac{1}{4} \left( 3 - \frac{F}{B} B' \right) \frac{1}{\frac{dt}{d\xi}} \quad (3.29)$$

В главе 1, § 4, мы условились рассматривать только такие русла, для которых  $\frac{F^3}{B}$  есть возрастающая функция от  $F$ . Русла, не удовлетворяющие этому условию, имеют как бы широкую пойму и при движении жидкости в таком русле уже нельзя пользоваться схемой одномерного движения. Это условие дает

$$\frac{d}{dF} \left( \frac{F^3}{B} \right) = \frac{3F^2}{B} - \frac{F^3}{B^2} B' > 0,$$

или

$$\frac{F^2}{B} \left( 3 - \frac{F}{B} B' \right) > 0. \quad (3.30)$$

Совершенно аналогичным образом для изменения углового коэффициента характеристик  $\eta = \text{const}$  при перемещении вдоль характеристики  $\xi = \text{const}$  получаем:

$$\frac{d}{dt} \left( U - \sqrt{\frac{gF}{B}} \right) = - \frac{d}{d\eta} \left[ \lambda(F) + \sqrt{\frac{gF}{B}} \right] \frac{d\eta}{dt},$$

или

$$\frac{d}{dt} \left( U - \sqrt{\frac{gF}{B}} \right) = \frac{1}{4} \left( 3 - \frac{F}{B} B' \right) \frac{1}{\frac{dt}{d\eta}} \quad (3.31)$$

Доказательство теоремы непосредственно вытекает из формул (3.29) и (3.31), если принять во внимание (3.30).

Для того, чтобы пояснить геометрический смысл линии, соответствующей в плоскости  $st$  разрушению волны (эту линию в дальнейшем мы будем называть линией разрыва), докажем следующую теорему:

✓ Теорема VII. В плоскости  $st$  огибающая характеристик первого или второго семейства есть линия разрыва.

Пусть

$$\left. \begin{aligned} t &= t(\xi, \eta), \\ s &= s(\xi, \eta) \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

есть решение уравнений (3.10). Составим уравнения для определения огибающей семейства характеристик  $\eta = \text{const}$ . Дифференцируя (3.19) по параметру  $\eta$ , имеем:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \frac{\partial t}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \eta} + \frac{\partial t}{\partial \eta}, \\ 0 &= \frac{\partial s}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \eta} + \frac{\partial s}{\partial \eta}. \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

Уравнения (3.32) определяют огибающую. Из этих уравнений при их совместности следует, что

$$\Delta^* = \frac{\partial t}{\partial \xi} \frac{\partial s}{\partial \eta} - \frac{\partial t}{\partial \eta} \frac{\partial s}{\partial \xi} = 0$$

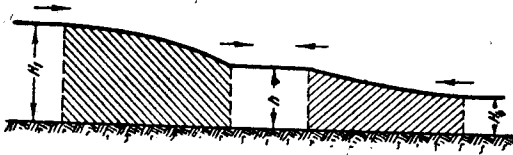
и, следовательно, на основании (3.13)

$$\Delta = 0.$$



§ 12. Волны, возникающие при встрече прямой и обратной волны

В предыдущей главе были рассмотрены решения уравнений (2.1), соответствующие установившемуся движению и волнам одного направления. Мы рассмотрим теперь неустановившееся движение, возникающее при встрече прямой и обратной волны, причем предположим, что как прямая, так и обратная волна отвечают либо простому повышению уровня без последующего понижения, либо, наоборот, понижению уровня без последующего повышения.



Фиг. 15.

Каждая из таких волн заканчивается установившимся движением. На фиг. 15 изображены прямая волна повышения и обратная волна понижения.

В дальнейшем мы будем предполагать, что в то время, когда мы рассматриваем какую-нибудь волну, она не разрушается. Все последующее будет справедливо до момента, когда одна из волн опрокинется.

Волны, возникающие после опрокидывания одной из волн, будут рассмотрены в гл. 4.

Рассмотрим, как изображаются в плоскости  $\xi\eta$  прямая и обратная волна и установившееся движение (фиг. 16). Установившееся движение

$$H = h, U = u$$

изображается в плоскости  $\xi\eta$  точкой  $C$  с координатами:

$$\left. \begin{aligned} \xi_C &= u + \lambda(f), \\ \eta_C &= u - \lambda(f). \end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

Прямая волна (2.15), нарушающая это установившееся движение, изображается в плоскости  $\xi\eta$  отрезком прямой  $\eta = \eta_C$ .

При  $\eta = \text{const}$

$$\xi = 2\lambda(F) + \eta, \quad (3.34)$$

откуда видно, что вдоль прямой волны  $\xi$  есть возрастающая функция от  $F$ . Таким образом волне повышения в плоскости  $\xi\eta$  соответствует отрезок  $CM_1$  (фиг. 16) полупрямой

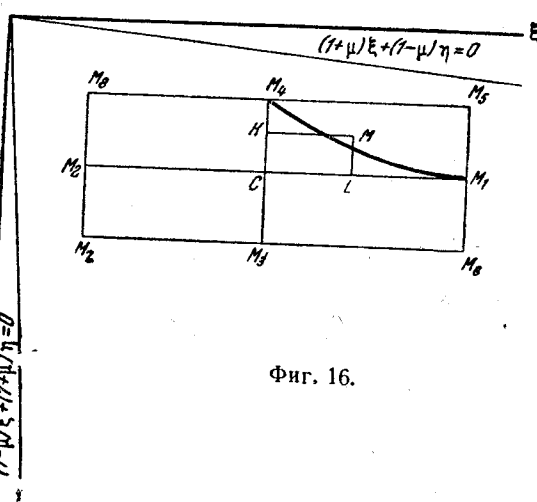
$$\eta = \eta_C, \quad \xi > \xi_C,$$

а волне понижения — отрезок  $CM_2$  полупрямой

$$\eta = \eta_C, \quad \xi < \xi_C.$$

Обратная волна (2.16) изображается в плоскости  $\xi\eta$  отрезком прямой  $\xi = \text{const}$ , проходящей через точку  $C$ . Так как вдоль этой волны

$$\eta = \xi - 2\lambda(F), \quad (3.35)$$



Фиг. 16.

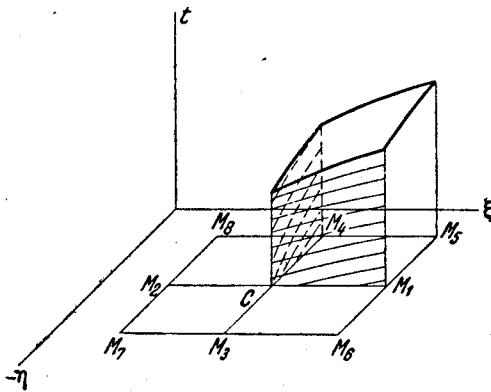
то  $\eta$  убывает при возрастании  $F$  и, следовательно, обратная волна повышения изображается в плоскости  $\xi\eta$  отрезком  $CM_3$  (фиг. 16) полупрямой

$$\xi = \xi_C, \eta < \eta_C.$$

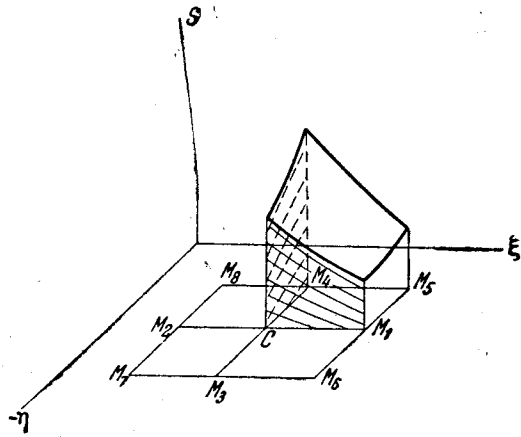
Обратная волна понижения изображается отрезком  $CM_4$  полупрямой

$$\xi = \xi_C, \eta > \eta_C.$$

Изобразим функции  $t = t(\xi, \eta)$  и  $s = s(\xi, \eta)$  в двух системах прямоугольных декартовых координат  $\xi, \eta, t$  и  $\xi, \eta, s$  (фиг. 17 и 18). Установившемуся движению в этих координатах отвечают отрезки прямых, параллельных соответственно осям  $t$  и  $s$  и проходящих через точку  $C$ , а прямой и обратной



Фиг. 17.



Фиг. 18.

волне — некоторые области в виде части полос, расположенных соответственно в плоскостях  $\xi = \text{const}$  или  $\eta = \text{const}$ . Характеристики установившегося движения в плоскости  $\xi\eta$  изображаются точкой  $C$ , а на прямых  $\xi_C = \xi, \eta = \eta_C$  системами точек, связанных уравнениями (2.36). Характеристикам первого семейства у прямой волны (2.41) в плоскости  $\xi\eta$  соответствуют точки на прямой  $\eta = \eta_C$ , а в пространствах  $\xi\eta t$  и  $\xi\eta s$  — прямые  $\eta = \eta_C, \xi = \text{const}$ , причем соответствующие точки на обеих прямых определяются уравнениями (2.41). Характеристикам второго семейства в плоскости  $\xi\eta$  соответствует отрезок прямой  $\eta = \eta_C$ , изображающий прямую волну, или часть этого отрезка. В пространствах  $\xi\eta t$  и  $\xi\eta s$  характеристики второго семейства изображаются кривыми, расположенными в плоскости  $\eta = \eta_C$  (фиг. 17 и 18).

Аналогичные заключения можно сделать относительно характеристик обратной волны, с той лишь разницей, что при этом характеристики первого и второго семейства как бы поменяются ролями.

Рассмотрим неустановившееся движение, возникающее при встрече прямой и обратной волны (фиг. 15). Фронт этого неустановившегося движения распространяется вдоль прямой волны в сторону отрицательных значений  $s$  и вдоль обратной волны в сторону положительных значений  $s$ . Закон движения фронта, распространяющегося по прямой волне, определяется соответствующей

характеристикой второго семейства этой волны (2.43), а закон движения фронта, распространяющегося в сторону положительных значений  $s$  — характеристикой (2.48) первого семейства, принадлежащей обратной волне. Значения  $\tau$  и  $\tau_1$  определяются моментом встречи этих волн.

Допустим в соответствии с фиг. 15, что прямая волна соответствует повышению уровня над ординаром, а обратная волна — понижению уровня по сравнению с ординаром, тогда в плоскости  $\xi\eta$  (фиг. 16) этим волнам отвечают отрезки характеристик  $CM_1$  и  $CM_4$ . Точки  $M_1$  и  $M_4$  изображают установившиеся движения, которыми заканчиваются прямая и обратная волна. Вдоль характеристик  $CM_1$  и  $CM_4$  известны значения  $t$  и  $s$  из (2.43), (2.15), (2.48) и (2.16).

Определение неустановившегося движения, возникающего в результате встречи прямой и обратной волны, приводит к задаче об определении интеграла уравнений (3.10) по известным значениям  $t$  и  $s$  на двух характеристиках разных семейств. Исключая из уравнений (3.10)  $s$ , мы получим для определения  $t$  уравнение:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{8 \sqrt{\frac{gF}{B}}} \left( 3 - \frac{F}{B} \frac{dB}{dF} \right) \left( \frac{\partial t}{\partial \xi} - \frac{dt}{\partial \eta} \right); \quad (3.36)$$

в частности, для параболических русел получим уравнение (3.16).

Известно, что задача об определении интеграла уравнения (3.36) по данным его значениям на двух характеристиках различных семейств имеет решение и притом единственное (Гурса [9], т. III, ч. 2, гл. XXVI). Решение это определено в области прямоугольника  $CM_1M_5M_4$ , образованного отрезками характеристик. Этот интеграл может быть построен методом последовательных приближений. В случае параболических русел это решение можно получить и в замкнутом виде при помощи функции Римана.<sup>1</sup>

Это решение имеет вид:

$$t(\xi, \eta) = t_0(\xi, \eta) + \beta \int_{\xi_c}^{\xi} \int_{\eta_c}^{\eta} F(x, y) G(x, y, \xi, \eta) dx dy, \quad (3.37)$$

где

$$t_0(\xi, \eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta) - C, \quad F(x, y) = \frac{1}{x-y} [f_1'(x) - f_2'(y)].$$

Функции  $f_1(\xi)$  и  $f_2(\eta)$  представляют собой значения  $t$  (2.43) и (2.48) на характеристиках  $CM_1$  и  $CM_4$ . Функции  $f_1(\xi)$  и  $f_2(\eta)$  удовлетворяют очевидному условию

$$f_1(\xi_c) = f_2(\eta_c) = C.$$

Функция Римана для уравнения (3.16) имеет вид:

$$G(x, y, \xi, \eta) = \frac{(y-x)^{2\beta}}{(\eta-x)^\beta (y-\xi)^\beta} F(\beta, \beta, 1, \sigma), \quad (3.38)$$

где

$$F(\beta, \beta, 1, \sigma) = 1 + \frac{\beta^2}{1} \sigma + \frac{\beta^2(\beta+1)^2}{(1 \cdot 2)^2} \sigma^2 + \frac{\beta^2(\beta+1)^2(\beta+2)^2}{(1 \cdot 2 \cdot 3)^2} \sigma^3 + \dots$$

<sup>1</sup> Гурса [9], т. III, гл. XXVI, и Дарбу [12].

есть гипергеометрический ряд и

$$\sigma = \frac{(\eta - y)(\xi - x)}{(\eta - x)(\xi - y)}$$

При  $\beta = 2$  уравнение (3.16) имеет интеграл, зависящий от двух произвольных функций [12]. Этот интеграл имеет вид:

$$t(\xi, \eta) = \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \left( \frac{\varphi_1(\xi) + \varphi_2(\eta)}{\xi - \eta} \right). \quad (3.39)$$

Решение получается тогда в сравнительно простом виде. Значение  $\beta = 2$  (3.18) соответствует  $n = \frac{3}{2}$  или  $k = 2$ , т. е. руслу, сечение которого ограничено параболой второй степени.

После построения функции  $t$  соответствующие значения  $s$  определяются, в силу уравнений (3.10) или (3.14), квадратурами

$$s(\xi, \eta) = \int_{\xi_0, \eta_0}^{\xi, \eta} \frac{\partial s}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial s}{\partial \eta} d\eta. \quad (3.40)$$

Решение окончательно получается в виде

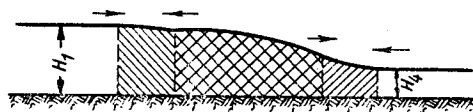
$$\left. \begin{aligned} t &= t(\xi, \eta), \\ s &= s(\xi, \eta). \end{aligned} \right\} \quad (3.41)$$

Это решение определено в прямоугольнике  $CM_1M_5M_4$ . Соответствующие ему поверхности изображены на фиг. 17 и 18.

Заметим, что, не говоря уже об общем случае, сравнительно простые формулы (3.37) и даже формулы, полученные на основании (3.39), не очень удобны для вычислений.

В гл. 5 будет изложен удобный и простой метод для приближенного решения уравнений (3.10) при различных контурных условиях и, в частности, при условиях, которые только что были указаны.

На фиг. 17 и 18 рассмотренному интегралу соответствуют поверхности, проходящие в плоскостях  $\xi = \xi_C$  и  $\eta = \eta_C$  через кривые, изображающие соответствующие характеристики, принадлежащие прямой и обратной волне.



Фиг. 19.

На фиг. 19 схематически изображен мгновенный профиль неустойчивого движения через некоторое время после встречи волн. Причем надо иметь в виду, что на фиг. 15 и 19 а также на всех дальнейших фигурах сильно искажен масштаб. В действительности длина волны в тысячи раз превосходит глубину русла.

Через некоторое время фронт нового неустойчивого движения, распространяющийся в сторону отрицательных значений  $s$ , достигает следующего за прямой волной установившегося движения ( $H_1, U_1$ ). При этом возникнет новая волна, а именно обратная волна понижения. В плоскости  $\xi\eta$  установившееся движение ( $H_1, U_1$ ) изображается точкой  $M_1$  (фиг. 16), а новая обрат-

ная волна понижения — отрезком  $M_1M_5$  характеристики  $\xi = \xi_1$ . Аналогичное заключение можно сделать и относительно фронта волны, распространяющегося в сторону положительных значений  $s$ . Когда этот фронт достигнет неустановившегося движения ( $H_4, U_4$ ), изображенного на фиг. 16 точкой  $M_4$ , то возникнет новая прямая волна повышения. В плоскости  $\xi\eta$  эта волна изображается отрезком  $M_4M_5$  характеристики  $\eta = \eta_4$ .

Уравнения прямой волны  $M_4M_5$  и обратной волны  $M_1M_5$  получаются в виде

$$\left. \begin{aligned} U &= \lambda(F) - \lambda(F_4) + U_4, \\ s &= \left( U + \sqrt{\frac{gF}{B}} \right) t + \varphi^*(F) \end{aligned} \right\} \quad (3.42)$$

и

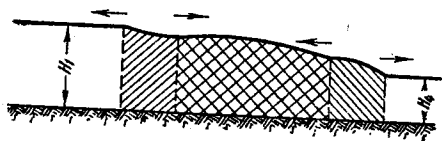
$$\left. \begin{aligned} U &= -\lambda(F) + \lambda(F_1) + U_1, \\ s &= \left( U - \sqrt{\frac{gF}{B}} \right) t + \varphi_*(F), \end{aligned} \right\} \quad (3.43)$$

причем функции  $\varphi^*(F)$  и  $\varphi_*(F)$  определяются по данным значениям интеграла (3.41) вдоль характеристик  $M_4M_5$  и  $M_1M_5$ .

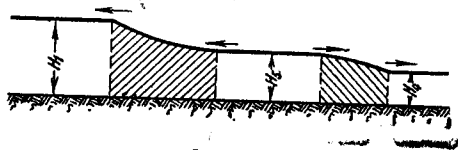
Остановимся, например, на определении функции  $\varphi^*(F)$ . Вдоль отрезка характеристики  $M_4M_5$  известны значения  $t$  и  $s$  как функции от  $\xi$ , следовательно, и от  $F$ :

$$\begin{aligned} t &= \bar{t}(F), \\ s &= \bar{s}(F). \end{aligned}$$

Подставляя эти значения во второе уравнение (3.42), найдем  $\varphi^*(F)$ . Аналогично по известным значениям  $t$  и  $s$  вдоль характеристики  $M_1M_5$  можно определить функцию  $\varphi_*(F)$ . Мгновенный профиль этих волн изображен на фиг. 20.



Фиг. 20.



Фиг. 21.

Если волны не разрушаются, то по истечении еще некоторого времени неустановившееся движение, соответствующее решению (3.41), полностью разложится на две волны — прямую (3.42) и обратную (3.43) и на установившееся движение ( $U_5, H_5$ ), отвечающее точке  $M_5$  на фиг. 16. Мгновенный профиль этих волн изображен на фиг. 21. Задача об определении неустановившегося движения, возникающего при встрече двух волн, прямой и обратной, в случае, когда эти волны соответствуют либо простому повышению, либо простому понижению уровня, была впервые рассмотрена, применительно к соответственной задаче газовой динамики, Риманом [23]. В этой работе впервые изложен метод интегрирования уравнений гиперболического типа, вида (3.36), который теперь носит название метода Римана, и дано выражение (3.38) для функции  $G(x, y, \xi, \eta)$  применительно к уравнению (3.16).

**§ 13. Разложение неустановившегося движения на прямую и обратную волну**

Рассмотрим теперь задачу, которую можно назвать обратной по отношению к задаче, разобранный в предыдущем параграфе.

Пусть в некотором сечении канала ( $s=0$ ) находится наблюдатель, снабженный приборами для измерения средней скорости и высоты уровня в канале. Наблюдения начинаются с момента  $t=t_0$  и заканчиваются в момент  $t=T$ . В результате произведенных наблюдений получаются две функции

$$\left. \begin{aligned} U &= U_0(t), \\ F &= F_0(t), \end{aligned} \right\} \quad (3.44)$$

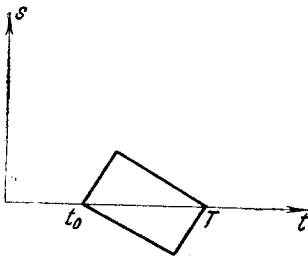
определенные в промежутке  $t_0 < t < T$ . Надо выяснить, какие заключения о движении жидкости в канале можно сделать на основании этих наблюдений. Из дальнейшего будет видно, что во всех случаях, за исключением того, когда в сечении  $s=0$  наблюдается установившееся движение или волна одного направления, неустановившееся движение в канале можно представить как происшедшее в результате встречи некоторой прямой и некоторой обратной волны.

Рассмотрим последовательно различные частные случаи.

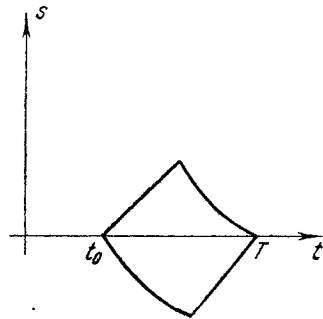
Случай I. *Установившееся движение.* Предположим, что функции (3.44) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} U &= u = \text{const}, \\ F &= f = \text{const}. \end{aligned} \right\}$$

На основании произведенных наблюдений можно утверждать, что установившееся движение существует в области, изображенной на фиг. 22. Прямые, ограничивающие эту область, представляют собой отрезки характеристик (2.36). Действительно, если в каком-нибудь сечении канала и в какой-нибудь момент времени в этой области появился бы фронт прямой или обратной волны, то в течение времени наблюдения он достиг бы сечения  $s=0$  и был бы отмечен наблюдателем.



Фиг. 22.



Фиг. 23.

Случай II. *Волна одного направления.* Допустим, что функции (3.44) удовлетворяют либо соотношению  $U_0(t) + \lambda [F_0(t)] = \text{const}$ , либо соотношению

<sup>1</sup> Доказательство этого утверждения вытекает из теоремы единственности, которая будет доказана в гл. 6 (§ 27).

$U_0(t) - \lambda [F_0(t)] = \text{const}$ . Обозначим через  $t_0(F)$  функцию, обратную  $F = F_0(t)$ . Эта функция, вообще говоря, многозначна, так как волна может соответствовать ряду последовательных подъемов и опусканий уровня. В этом случае уравнение волны мы получим или в виде (2.15) или в виде (2.16) ( $l = 0$ ). На основании произведенных наблюдений можно утверждать, что неустановившееся движение, отвечающее прямой или обратной волне, существует в области, изображенной на фиг. 23. Отрезки кривых, ограничивающих эту область, представляют собой отрезки характеристик (2.41) и (2.43) или (2.46) и (2.48). Если в каком-нибудь сечении канала и в какой-нибудь момент времени, изображенный в области на фиг. 23, появился бы фронт встречной волны или данная волна закончилась бы установившимся движением, то за время наблюдений фронт этих волн достиг бы сечения  $s = 0$  и появление новой волны было бы отмечено наблюдателем.

Случай III. Построим на основании наблюдений (3.44) кривую

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi_0(t) = U_0(t) + \lambda [F_0(t)], \\ \eta &= \eta_0(t) = U_0(t) - \lambda [F_0(t)] \end{aligned} \right\} \quad (3.45)$$

в плоскости  $\xi\eta$ . Эта кривая может иметь самый разнообразный вид. Мы предположим сейчас, что кривая (3.45) такова, что она пересекается прямыми, параллельными осям  $\xi$  и  $\eta$  только в одной точке. Пусть это, например, кривая  $M_1M_4$ , изображенная на фиг. 16. Покажем, что по данным (3.45) можно определить решение уравнений (3.10) или, в частности, (3.14) в области  $SM_1M_3M_4$  (фиг. 16). Вдоль кривой (3.45) в плоскости  $\xi\eta$  известны значения  $t$  и  $s$ . Так как эта кривая не есть характеристика, то вдоль нее по этим данным можно вычислить значения производных от  $t$  и  $s$  по  $\xi$  и  $\eta$ .

Дифференцируя вдоль кривой (3.45) функции  $t$  и  $s$ , получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial \xi} \xi'_0(t) + \frac{\partial s}{\partial \eta} \eta'_0(t) &= 0, \\ \frac{\partial t}{\partial \xi} \xi'_0(t) + \frac{\partial t}{\partial \eta} \eta'_0(t) &= 1. \end{aligned}$$

Обозначим через  $t = \alpha(\xi)$  и  $t = \beta(\eta)$  функции, обратные по отношению к функциям (3.45). Исключая, кроме того,  $t$  из уравнений (3.45), получим  $\xi = \chi(\eta)$  или, обратно,  $\eta = \psi(\xi)$ .

Принимая во внимание (3.10), получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial \xi} &= A(\xi) \alpha'(\xi), \\ \frac{\partial t}{\partial \eta} &= B(\eta) \beta'(\eta), \end{aligned} \right\} \quad (3.46)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A(\xi) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{B}{gF}} \left( U + \sqrt{\frac{gF}{B}} \right), \\ B(\eta) &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{B}{gF}} \left( U - \sqrt{\frac{gF}{B}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.47)$$

Определение решения системы уравнений (3.10) по данным значениям неизвестных функций на кривой, не являющейся характеристикой, или реше-

ние уравнения (3.36) по данным значениям неизвестной функции и ее первых производных вдоль этой кривой называется задачей Коши ([9], гл. XXVI). Решение уравнения (3.36) по данным (3.46) определяется в области  $CM_1M_5M_4$  методом последовательных приближений ([9], гл. XXVI). Для уравнения (3.16) это решение может быть получено и в замкнутом виде:<sup>1</sup>

$$t(\xi, \eta) = t_0(\xi, \eta) + \beta \int_{\lambda(\eta)}^{\xi} \int_{\psi(x)}^{\eta} F(x, y) G(x, y, \xi, \eta) dx dy,$$

где

$$t_0(\xi, \eta) = \int_{\xi_C}^{\xi} A(x) \alpha'(x) dx + \int_{\eta_C}^{\eta} B(y) \beta'(y) dy + t_0$$

и

$$F(\xi, \eta) = \frac{1}{\xi - \eta} [A(\xi) \alpha'(\xi) - B(\eta) \beta'(\eta)].$$

Функция  $G(x, y, \xi, \eta)$  есть функция (3.38).

Соответствующие значения  $s$  определяются из уравнения

$$s(\xi, \eta) = \int_{\xi_0 \eta_0}^{\xi \eta} \frac{\partial s}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial s}{\partial \eta} d\eta.$$

Полученное решение,

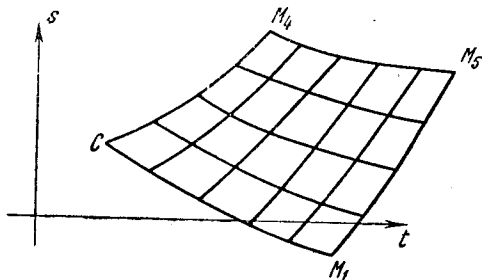
$$\left. \begin{aligned} t &= t(\xi, \eta), \\ s &= s(\xi, \eta) \end{aligned} \right\} \quad (3.48)$$

единственное. В случае  $\beta = 2$  можно получить соответствующее решение и при помощи интеграла (3.39).

В гл. 5 будет дан удобный приближенный метод для построения этого решения.

Если явление разрушения волны не имеет места, то на основании теоремы IV область значений  $t$  и  $s$  (3.48) в плоскости  $ts$  имеет вид, изображенный на фиг. 24. На основании произведенных наблюдений неустановившееся движение в канале определено в те моменты времени и в тех местах канала, которые соответствуют области  $CM_1M_5M_4$ .

Покажем теперь, что данное неустановившееся движение можно рассматривать как полученное в результате встречи некоторой прямой и некоторой обратной волны. Каждая из этих волн соответствует либо простому повышению, либо простому понижению уровня. Вдоль кривой  $CM_1$  в плоскости  $ts$   $\eta = \text{const}$ , т. е.  $U = \lambda(F) + C$ , где  $C = U_C - \lambda(F_C)$ . Вдоль этой кривой на основании полученного решения (3.48) известны значения  $t$  и  $s$ , как функции



Фиг. 24.

Покажем теперь, что данное неустановившееся движение можно рассматривать как полученное в результате встречи некоторой прямой и некоторой обратной волны. Каждая из этих волн соответствует либо простому повышению, либо простому понижению уровня. Вдоль кривой  $CM_1$  в плоскости  $ts$   $\eta = \text{const}$ , т. е.  $U = \lambda(F) + C$ , где  $C = U_C - \lambda(F_C)$ . Вдоль этой кривой на основании полученного решения (3.48) известны значения  $t$  и  $s$ , как функции

<sup>1</sup> См. Дарбу [12], стр. 77—83.



от  $\xi$  (или от  $F$ ). На основании этих данных, как это было показано в § 12 настоящей главы, можно определить прямую волну в виде (3.42). Таким же образом по данным вдоль характеристики  $SM_4$  можно определить обратную волну в виде (3.43).

Определяя неустановившееся движение, происходящее при встрече этих двух волн, так, как это указано в § 12, мы восстановим решение (3.48). Разложение данной волны на две волны разного направления возможно только единственным способом. В § 15 мы разберем общий случай, когда функции (3.45) произвольны, и покажем, что и в этом случае неустановившееся движение, определяемое наблюдениями (3.44), можно всегда представить себе как происшедшее в результате встречи двух волн, прямой и обратной, причем эти две волны определяются единственным образом.

#### § 14. Классификация волн

Свойства характеристик, доказанные в § 11, позволяют дать некоторую классификацию волн в зависимости от знаков производных  $\frac{\partial t}{\partial \xi}$  и  $\frac{\partial t}{\partial \eta}$ . Эта классификация устанавливает четыре различных типа волн, причем для волн, принадлежащих к различным типам, явление разрушения происходит различным образом.

В гл. 5 будет видно, что формулы для приближенного расчета волн, принадлежащих к различным типам, различны.

##### 1. Волна типа прямой волны повышения

$$\frac{\partial t}{\partial \xi} > 0, \quad \frac{\partial t}{\partial \eta} > 0, \quad \Delta > 0.$$

Соответствующее решение определено в области  $SM_1M_5M_4$  (фиг. 16). В точке  $C$  время имеет наименьшее значение, а в точке  $M_5$  — наибольшее. Это неустановившееся движение можно рассматривать как полученное в результате встречи прямой волны повышения, изображенной на фиг. 16 отрезком прямой  $SM_1$ , и обратной волны понижения, изображенной на фиг. 16 отрезком  $SM_4$ . Значение времени в точке  $C$  соответствует моменту встречи этих волн.

Мы предположим, что вдоль характеристик  $SM_1$  и  $SM_4$  явление разрушения не имеет места, т. е.  $\Delta > a > 0$ . Пусть  $M$  точка, в которой  $\Delta = 0$ . Проведем из точки  $M$  характеристики  $\xi = \text{const}$  и  $\eta = \text{const}$  до пересечения соответственно с  $SM_1$  и  $SM_4$ . Мы будем считать, что  $M$  — первая точка на характеристиках  $KM$  и  $LM$ , в которой  $\Delta = 0$ . Такая точка всегда существует вследствие непрерывности  $\Delta$  и того, что  $\Delta > a > 0$  на ломаной  $M_1SM_4$ .

Так как в точке  $M$  по предположению  $\Delta = 0$ , то из (3.11) и (3.13) следует, что в этой точке обращается в нуль либо одна из производных  $\frac{\partial t}{\partial \xi}$  и  $\frac{\partial t}{\partial \eta}$ , либо обе эти производные вместе. Так как  $\frac{\partial t}{\partial \xi} > 0$  и  $\frac{\partial t}{\partial \eta} > 0$  на ломаной  $M_1SM_4$ , то  $\Delta$  может обратиться в нуль только, если вблизи точки  $M$   $\frac{\partial t}{\partial \xi}$  убывает вдоль  $LM$  или  $\frac{\partial t}{\partial \eta}$  убывает вдоль  $KM$ .

Отсюда

$$\frac{\partial^2 t}{\partial \xi \partial \eta} < 0$$

вблизи точки  $M$ .

Обращаясь к уравнению (3.36) и принимая во внимание (3.30), получаем

$$\frac{\partial t}{\partial \xi} - \frac{\partial t}{\partial \eta} < 0,$$

откуда видна возможность двух случаев: первого, когда

$$\frac{\partial t}{\partial \xi} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial t}{\partial \eta} > a_1 > 0,$$

и второго, когда

$$\frac{\partial t}{\partial \xi} \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial t}{\partial \eta} \rightarrow 0.$$

Этот последний случай будет особым.

Пользуясь (3.4) и (3.8), получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{1}{2\Delta^*} \left( \frac{\partial s}{\partial \eta} - \frac{\partial s}{\partial \xi} \right), & \frac{\partial U}{\partial s} &= \frac{1}{2\Delta^*} \left( \frac{\partial t}{\partial \xi} - \frac{\partial t}{\partial \eta} \right), \\ \frac{\partial F}{\partial t} &= \frac{1}{2\lambda'(F)\Delta^*} \left( \frac{\partial s}{\partial \eta} + \frac{\partial s}{\partial \xi} \right), & \frac{\partial F}{\partial s} &= -\frac{1}{2\lambda'(F)\Delta^*} \left( \frac{\partial t}{\partial \eta} + \frac{\partial t}{\partial \xi} \right), \end{aligned} \right\} \quad (3.49)$$

откуда, считая, что

$$U + \sqrt{\frac{gF}{B}} > 0,$$

получим вблизи места разрушения волны в неособом случае:

$$\frac{\partial F}{\partial s} < 0, \quad \frac{\partial U}{\partial s} < 0, \quad \frac{\partial F}{\partial t} > 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t} > 0.$$

Эти неравенства совпадают с соответствующими неравенствами для прямой волны повышения (гл. 2, § 6) и, следовательно, вблизи места разрушения мгновенный профиль волны и распределение скоростей аналогичны тем, которые наблюдаются у прямой волны повышения.

Заметим, что вследствие (3.26) и (3.28) до момента разрушения волны характеристики обоих семейств имеют вогнутость, направленную в сторону положительных значений  $s$ . При отсутствии разрушения волны функции

$$\begin{aligned} t &= t(\xi, \eta), \\ s &= s(\xi, \eta) \end{aligned}$$

отображают прямоугольник  $CM_1M_3M_4$  на область, изображенную на фиг. 24.

## 2. Волна типа обратной волны повышения

$$\frac{\partial t}{\partial \xi} < 0, \quad \frac{\partial t}{\partial \eta} < 0, \quad \Delta > 0.$$

Соответствующее решение определено в области  $CM_2M_7M_3$  (фиг. 16), причем в точке  $C$  время имеет наименьшее значение. Эта волна может быть представлена как происходящая в результате встречи прямой волны понижения и обратной волны повышения.

Рассуждая совершенно так же, как в предыдущем случае, получим, что возможны два случая:

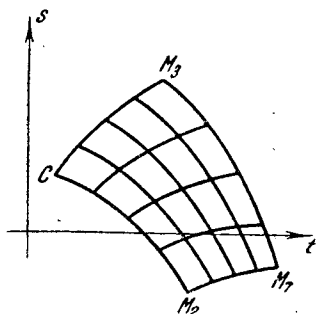
$$\text{и} \quad \frac{\partial t}{\partial \eta} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial t}{\partial \xi} < a_2 < 0$$

$$\frac{\partial t}{\partial \xi} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial t}{\partial \eta} \rightarrow 0 \text{ (особый случай).}$$

Вблизи места разрушения волны знаки производных от  $U$  и  $F$  по  $s$  и  $t$  при условии

$$U - \sqrt{\frac{gF}{B}} < 0$$

совпадают со знаками соответствующих производных для обратной волны повышения (см. гл. 2, § 6). В плоскости  $st$  характеристики обоих семейств имеют вогнутость, направленную в сторону отрицательных значений  $s$ . Область в плоскости  $ts$ , соответствующая при отсутствии явления разрушения волны области  $CM_2M_7M_3$ , изображена на фиг. 25.



Фиг. 25.

### 3. Волны, не испытывающие разрушения

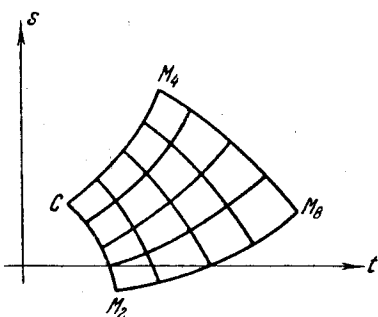
$$\frac{\partial t}{\partial \xi} < 0, \quad \frac{\partial t}{\partial \eta} > 0, \quad \Delta < 0.$$

Соответствующее решение определено в области  $CM_2M_8M_4$ . В точке  $C$  время имеет наименьшее значение. Эта волна может быть представлена как

полученная в результате встречи прямой волны

понижения с обратной волной понижения. Рассматривая знак производной  $\frac{\partial^2 t}{\partial \xi \partial \eta}$  вблизи предполагаемого места разрушения, мы убеждаемся, что эта волна вообще не разрушается.

В плоскости  $ts$  характеристики первого семейства ( $\xi = \text{const}$ ) имеют вогнутость, направленную в сторону положительных значений  $s$ , а характеристики второго семейства ( $\eta = \text{const}$ ) — вогнутость, направленную в сторону отрицательных значений  $s$ . Соответствующая область в плоскости  $ts$  изображена на фиг. 26.



Фиг. 26.

### 4. Смешанная волна

$$\frac{\partial t}{\partial \xi} > 0, \quad \frac{\partial t}{\partial \eta} < 0, \quad \Delta < 0.$$

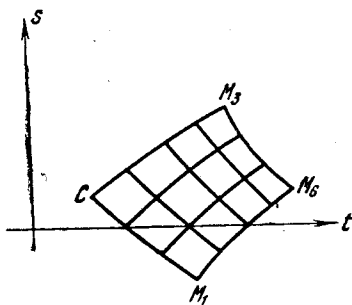
Соответствующее решение определено в области  $CM_1M_6M_3$ . Эта волна может быть представлена как результат встречи прямой волны

повышения с обратной волной повышения. Эта волна может испытывать разрушение и как прямая положительная и как обратная положительная волна, т. е. возможны три случая:

$$\text{и} \quad \frac{\partial t}{\partial \xi} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial t}{\partial \eta} < a_3 < 0; \quad \frac{\partial t}{\partial \eta} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial t}{\partial \xi} > a_4 > 0$$

$$\frac{\partial t}{\partial \xi} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial t}{\partial \eta} \rightarrow 0 \text{ (особый случай).}$$

В плоскости  $ts$  характеристики второго семейства ( $\eta = \text{const}$ ) имеют вогнутость, направленную в сторону положительных значений  $s$ , а характеристики первого семейства ( $\xi = \text{const}$ ) — вогнутость, направленную в сторону отрицательных значений  $s$ . Соответствующая область в плоскости  $ts$  изображена на фиг. 27.



Фиг. 27.

Отметим, что при решении различных задач всегда можно до определения самого решения по одним граничным условиям сказать, к какому типу принадлежит рассматриваемое решение, и таким образом в общих чертах представить себе это решение.

### § 15. Многолистные поверхности

В §§ 12 и 13 были рассмотрены две задачи: задача об определении неустановившегося движения, возникающего при встрече прямой и обратной волны, и обратная задача о представлении данного неустановившегося движения как результат встречи двух волн разного направления. При этом предполагалось, что как прямая, так и обратная волна соответствуют либо простому подъему уровня, либо простому понижению уровня и заканчиваются установившимся движением.

Рассмотрим теперь общий случай. Остановимся на задаче о разложении данного неустановившегося движения на прямую и обратную волну. Пусть функции

$$\left. \begin{aligned} U &= U_0(t), \\ F &= F_0(t), \end{aligned} \right\} \quad (3.44)$$

полученные в результате наблюдений над неустановившимся движением в каком-нибудь сечении канала, таковы, что функции

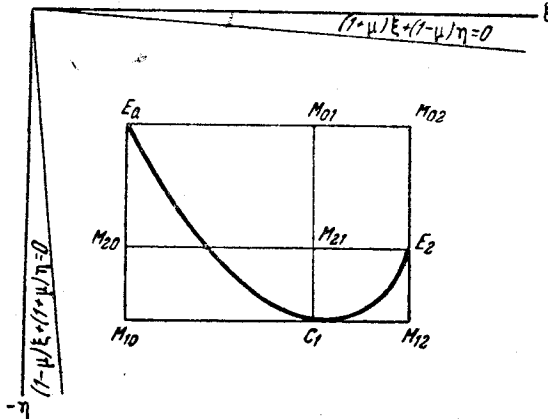
$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \xi_0(t) = U_0(t) + \lambda [F_0(t)], \\ \eta_1 &= \eta_0(t) = U_0(t) - \lambda [F_0(t)] \end{aligned} \right\} \quad (3.45)$$

имеют за время наблюдений  $t_0 < t < T$  конечное число экстремумов. Эти функции могут также иметь конечное число участков, на которых  $\xi$  или  $\eta$  или  $\xi$  и  $\eta$  вместе остаются постоянными.

Предположим временно, что участков, отвечающих постоянству  $\xi$  и  $\eta$ , нет. Рассмотрим сначала частный случай. Пусть в промежутке  $t_0 < t < T$   $\xi'_0 > 0$  и  $\eta'_0 < 0$  при  $t_0 < t < t_1$  и  $\eta'_0 > 0$  при  $t_1 < t < T$ . Соответствующая кривая нанесена на фиг. 28. Проведем через точки  $E_0$ ,  $C_1$  и  $E_2$  прямые, параллельные осям координат, до взаимного их пересечения. По данным (3.45), § 13, вдоль кривой  $E_0C_1$  можно, решая уравнения (3.10), определить функции  $t = t(\xi, \eta)$  и  $s = s(\xi, \eta)$  в области прямоугольника  $E_0M_{10}C_1M_{01}$ . Обозначим это решение  $(t_1, s_1)$ . Точно так же можно определить по данным (3.45) вдоль кривой  $C_1E_2$  решение уравнений (3.10) в области прямоугольника  $M_{21}C_1M_{12}E_2$ . Обозначим это решение  $(t_2, s_2)$ . Вдоль характеристики  $C_1M_{21}$  значения  $(t_1, s_1)$

и  $(t_2, s_2)$ , вообще говоря, не совпадают. Вдоль характеристики  $C_1 M_{10}$  известны значения интеграла  $(t_1, s_1)$ , а вдоль характеристики  $C_1 M_{21}$  — значения интеграла  $(t_2, s_2)$ .

По этим значениям (§ 12) построим интеграл уравнений (3.10) в области прямоугольника  $M_{20} M_{21} C_1 M_{10}$ . Обозначим его  $(t_3, s_3)$ . Точно так же по значениям интеграла  $(t_1, s_1)$  вдоль характеристики  $C_1 M_{01}$  и интеграла  $(t_2, s_2)$



Фиг. 28.

вдоль характеристики  $C_1 M_{12}$  определим решение уравнений (3.10) в области  $C_1 M_{01} M_{02} M_{12}$ . Обозначим это решение  $(t_4, s_4)$ . Для того, чтобы показать, что функции  $(t_1, s_1)$ ,  $(t_2, s_2)$ ,  $(t_3, s_3)$  и  $(t_4, s_4)$  определяют неустановившееся движение в канале по наблюдениям (3.44), определим знаки производных от этих функций. Напомним, что если не происходит разрушения волны, то эти производные сохраняют свой знак в каждой из областей, в которых определены эти функции.

Мы предположим сначала, что область, изображенная на фиг. 28, расположена в части плоскости, отвечающей спокойному состоянию потока, т. е. в части плоскости, определяемой неравенствами (3.23). Доказательство для случая, когда рассматриваемая область расположена и в области, отвечающей бурному состоянию потока, получается точно такими же рассуждениями на основании преобразования к переменным Лагранжа. Это преобразование будет изложено в § 18.

На основании (3.46) и (3.47), (3.23) и (3.10) получаем, что вдоль отрезка  $E_0 C_1$  кривой (3.45) и, следовательно, при отсутствии явления разрушения волны во всей области  $E_0 M_{01} C_1 M_{10}$

$$\frac{\partial t_1}{\partial \xi} > 0, \quad \frac{\partial t_1}{\partial \eta} < 0, \quad \frac{\partial s_1}{\partial \xi} < 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial s_1}{\partial \eta} < 0.$$

На том же основании в области  $C_1 M_{12} E_2 M_{21}$

$$\frac{\partial t_2}{\partial \xi} > 0, \quad \frac{\partial t_2}{\partial \eta} > 0, \quad \frac{\partial s_2}{\partial \xi} < 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial s_2}{\partial \eta} > 0.$$

В области  $M_{10} C_1 M_{21} M_{20}$

$$\frac{\partial t_3}{\partial \xi} > 0, \quad \frac{\partial t_3}{\partial \eta} > 0, \quad \frac{\partial s_3}{\partial \xi} < 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial s_3}{\partial \eta} > 0,$$

так как значения  $(t_3, s_3)$  совпадают со значениями  $(t_1, s_1)$  вдоль  $M_{10} C_1$  и со значениями  $(t_2, s_2)$  вдоль  $C_1 M_{21}$ . Из аналогичных соображений заключаем, что в области  $C_1 M_{01} M_{02} M_{12}$

$$\frac{\partial t_4}{\partial \xi} > 0, \quad \frac{\partial t_4}{\partial \eta} < 0, \quad \frac{\partial s_4}{\partial \xi} < 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial s_4}{\partial \eta} < 0.$$

Область, изображенную на фиг. 28, нужно рассматривать как состоящую из двух листов. На одном листе расположена область  $E_0 M_{10} M_{12} M_{02}$ , а на другом — область  $M_{20} M_{10} M_{12} E_2$ ; оба эти листа скреплены вдоль прямой  $M_{10} M_{12}$ . Если повернуть прямоугольник  $M_{20} M_{10} M_{12} E_2$  вне плоскости чертежа на  $180^\circ$  вокруг прямой  $M_{10} M_{12}$ , то мы получим однолистную область, изображенную на фиг. 29.

Аналитически этот поворот эквивалентен следующей замене переменных:

$$x = \xi, \quad y = \eta \quad \text{в области } E_0 M_{02} M_{12} M_{10}$$

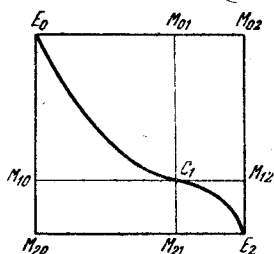
и

$$x = \xi, \quad y = 2\eta_{10} - \eta \quad \text{в области } M_{20} M_{10} M_{12} E_2,$$

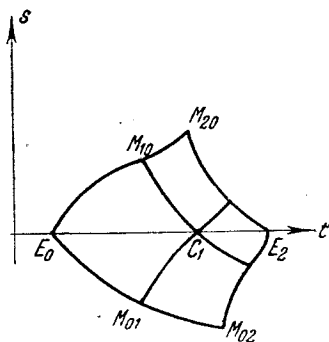
где  $\eta_{10}$  есть значение  $\eta$ , отвечающее точке  $M_{10}$ . В новых переменных знаки:

$$\frac{\partial t}{\partial x} > 0, \quad \frac{\partial t}{\partial y} < 0, \quad \frac{\partial s}{\partial x} < 0, \quad \frac{\partial s}{\partial y} < 0$$

сохраняются во всей рассматриваемой области  $E_0 M_{20} E_2 M_{02}$  в плоскости  $xu$ . Рассуждая совершенно так же, как при доказательстве теоремы IV, мы убеж-



Фиг. 29.



Фиг. 30.

даемся, что эта область при помощи функций  $(t_1, s_1)$ ,  $(t_2, s_2)$ ,  $(t_3, s_3)$  и  $(t_4, s_4)$  отображается взаимно однозначно на некоторую область в плоскости  $ts$ . Кривой  $E_0 C_1 E_2$  отвечает отрезок оси  $s = 0$ , а отрезкам характеристик — соответствующие кривые (фиг. 30). Рассматриваемое неустановившееся движение состоит из двух волн. Одна из этих волн принадлежит к типу смешанной волны, а другая к типу прямой волны повышения. Направление вогнутости характеристик определено на основании теоремы V. При встрече с характеристикой  $M_{10} M_{12}$  характеристики  $\xi = \text{const}$  изменяют направление своей вогнутости.

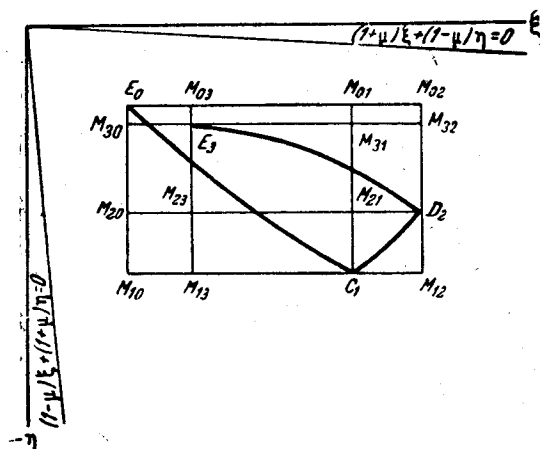
Данное неустановившееся движение можно рассматривать как полученное в результате встречи прямой волны повышения и обратной волны, состоящей из повышения уровня с последующим понижением. Эти волны определяются так, как указано в § 13.

Переходя к рассмотрению общего случая, допустим, что в промежутке  $t_0 < t < T$  функция  $\xi = \xi_0(t)$  имеет  $m$  экстремумов, а функция  $\eta = \eta_0(t)$  имеет  $n$  экстремумов. Обозначим соответствующие значения  $t$ , перенумерованные в порядке возрастания, через

$$t_0 < t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq \dots \leq t_{m+n} < t_{m+n+1} = T \quad (3.50).$$

Некоторые из этих значений могут совпадать. Нанесем соответствующую кривую (3.45) в плоскости  $\xi\eta$  и проведем (фиг. 31) через каждую точку (3.50) прямые, параллельные осям координат. Точки пересечения этих прямых обозначим следующим образом. Концы кривой назовем  $E_0$  и  $E_{m+n+1}$ . Буквой  $D$

с соответствующим порядковым значком обозначим те точки на кривой (3.45), которые соответствуют экстремумам  $\xi$ , а  $C$  те точки, которые соответствуют экстремумам  $\eta$ . Припишем  $C$  и  $D$  те же значки, что у соответствующих значений  $t$ . Остальные точки мы обозначим через  $M$  с двумя значками, причем первый значок указывает номер той точки на кривой (3.45), через которую проходит прямая, параллельная оси  $\xi$ , а второй значок — номер точки на той же кривой, через которую проходит прямая, параллельная

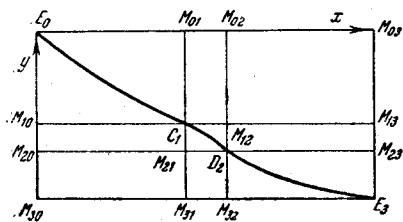


Фиг. 31.

оси  $\eta$ . Полученную область мы будем рассматривать как многолиственную.

Возьмем прямоугольный лист прозрачной бумаги и на двух его сторонах, пересекающихся в точке, которую мы обозначим  $E_0$ , нанесем последовательно отрезки, представляющие длины промежутков изменения  $\xi$  и  $\eta$ , соответствующих промежуткам (3.50). Эти отрезки мы будем откладывать в порядке (3.50).

Каждая сторона прямоугольника разделится таким образом на  $n + m + 1$  частей. Проведем через каждую точку деления прямые, параллельные сторонам прямоугольника. Эти прямые разделят область на  $(n + m + 1)^2$  прямоугольников. Среди этих прямоугольников отметим  $n + m + 1$  „диагональных прямоугольников“. За первый диагональный прямоугольник возьмем тот, вершина которого есть  $E_0$ . Нанесем в этом прямоугольнике



Фиг. 32.

соответствующий отрезок кривой (3.45). Обозначим противоположную вершину этого прямоугольника той же буквой, которая стоит в конце этого участка кривой (фиг. 32). Это будет  $C_1$  или  $D_1$ . За второй прямоугольник возьмем тот прямоугольник с вершиной  $C_1$  или  $D_1$ , который не имеет общей стороны с первым прямоугольником, и нанесем в этом прямоугольнике соответствующий участок кривой (3.45). Обозначим его противоположную вершину через  $D_2$  или  $C_2$ , смотря по тому, какая буква стоит в конце соответствующего участка кривой (3.45).

Продолжая таким образом, получим  $n + m + 1$  прямоугольников, каждый из которых будет содержать участок кривой (3.45). Заметим, что из произведенного построения следует, что каждый участок кривой будет повернут по

отношению к своему предыдущему на  $180^\circ$  вокруг прямой, проходящей через его начало, параллельно оси  $\xi$ , если эта точка была  $C_j$ , или вокруг прямой, параллельной оси  $\eta$ , если это была точка  $D_k$ . При нанесении участков кривой в соответствующих прямоугольниках нужно руководствоваться тем, чтобы каждый участок был правильно повернут относительно своего предыдущего. Остальные вершины отмеченных прямоугольников, а также вершины остальных прямоугольников обозначим теми же буквами, что и на фиг. 31. Заметим, что при этом точки, отмеченные буквами с одинаковыми индексами (первым или вторым), будут лежать на одной прямой. На обратной стороне листа обведем тот же чертеж.

Произведенное построение можно выразить аналитически следующим образом. Примем стороны прямоугольника, пересекающиеся в точке  $E_0$ , за оси координат  $x$  и  $y$ , ориентированные так же, как оси  $\xi$  и  $\eta$ . Для полосы, параллельной оси  $\xi$ , лежащей между прямыми, проходящими через точки  $C_k$  и  $C_{k+1}$ , произведенное преобразование эквивалентно замене

$$\eta = \alpha_k \pm y,$$

где  $\alpha_k = \text{const}$ .

Аналогично для полосы, параллельной оси  $\eta$ , лежащей между прямыми, проходящими через точки  $D_l$  и  $D_{l+1}$ , преобразование соответствует замене

$$\xi = \beta_l \pm x,$$

где  $\beta_l = \text{const}$ . Как нетрудно проверить,  $t$  изменяется вдоль кривой  $E_0 E_{m+n+1}$  в плоскости  $xu$  монотонно.

Сложим лист, изображенный на фиг. 32, перегибая его на  $180^\circ$  вокруг прямых, параллельных оси  $x$ , проходящих через точки  $C_i$ , и вокруг прямых, параллельных оси  $\eta$ , проходящих через точки  $D_j$ . Мы получим многолистную поверхность, состоящую из  $(n+1)(m+1)$  листов;  $m+n+1$  из них содержат участки кривой (3.45), расположенные так же, как на фиг. 31. В каждом из  $n+m+1$  прямоугольников можно определить функции  $t$  и  $s$ , решая задачу Коши для уравнений (3.10), как это показано в § 13. В каждом из следующих прямоугольников мы получим функции  $t$  и  $s$ , решая задачу об определении этих функций из уравнений (3.10) по значениям, которые принимают эти функции на двух характеристиках (§ 12). Полученные таким образом  $(m+n+1)^2$  пар функций отображают многолистную поверхность в плоскости  $\xi\eta$  на однолистную поверхность в плоскости  $ts$ . Действительно,  $t$  и  $s$  изменяются в плоскости  $xu$  вдоль каждой прямой  $x = \text{const}$  и  $y = \text{const}$  монотонно, так что, принимая во внимание знаки производных, мы заключаем так же, как в предыдущем параграфе, что соответствующая область в плоскости  $ts$  однолиста.

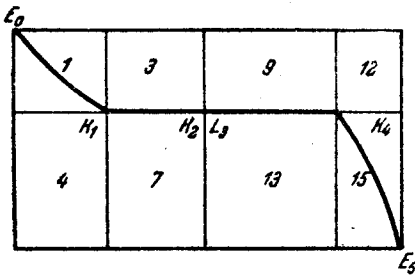
Рассматриваемое неустановившееся движение можно представить себе как полученное в результате встречи двух волн одного направления, причем прямая волна будет состоять из  $m+1$  последовательных участков, соответствующих подъему или опусканию уровня, а обратная волна — из  $n+1$  участков. Определение этих волн производится так же, как это было указано в § 13.



Снимем теперь одно из ограничений, наложенных на функции (3.45) в предыдущем случае. Выясним, какой смысл имеют участки кривой (3.45), представляющие собой отрезки прямых, параллельных координатным осям, или представляющие собой точки. Для конкретности допустим, что кривая (3.45) имеет вид:

$$\begin{aligned} t_0 < t < t_1, \quad \xi'_0 > 0, \quad \eta'_0 < 0; \quad t_1 < t < t_2, \quad \xi'_0 > 0, \quad \eta_0 = \eta_1; \\ t_2 < t < t_3, \quad \xi_0 = \xi_1, \quad \eta_0 = \eta_1; \quad t_3 < t < t_4, \quad \xi'_0 > 0, \quad \eta_0 = \eta_1; \\ t_4 < t < t_5, \quad \xi'_0 > 0, \quad \eta'_0 < 0. \end{aligned}$$

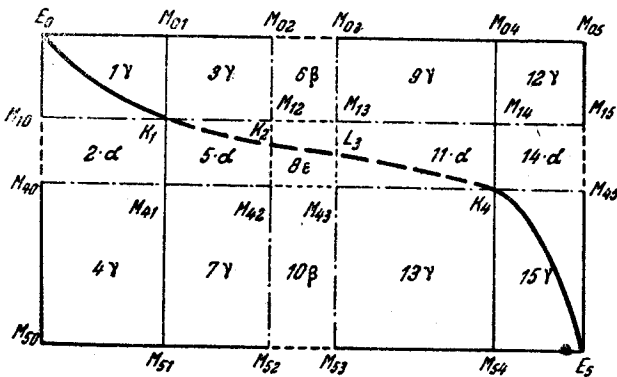
Соответствующий участок кривой изображен на фиг. 33. Те точки кривой (3.45), которые являются концами участков, представляющих собой отрезки



Фиг. 33.

прямых, параллельных оси  $\xi$ , обозначим через  $K$  с соответствующим значком; концы отрезков, параллельных оси  $\eta$ , — через  $L$  с соответствующим значком. Участки кривой, соответствующие точкам, обозначим двумя буквами  $K$  и  $L$  с двумя последовательными значками. Область, изображенную на фиг. 33, можно рассматривать как полученную сжатием, параллельным осям координат, из области, изображенной на фиг. 34.<sup>1</sup>

При этом сжатии области 1, 3, 4, 7, 9, 12, 13 и 15 сохраняются неизменными, области 2, 5, 6, 10, 11, 14 сжимаются в отрезки, а область 8 — в точку. На фиг. 34 буквами  $\alpha$  обозначены области, соответствующие прямой волне,  $\beta$  — обратной,  $\epsilon$  — установившемуся движению и  $\gamma$  — волне, полученной при наложении



Фиг. 34.

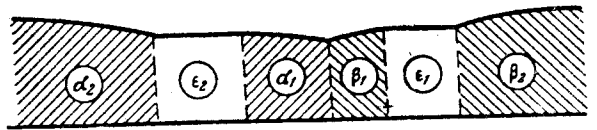
прямой и обратной волны. На фиг. 34 смешанным пунктиром обозначены те линии, которые после сжатия попарно совпадают и дают на фиг. 33 линии, простым же пунктиром обозначены те линии, которые на фиг. 33 сжимаются в точку.

Покажем, как определить неустановившееся движение в канале, соответствующее участку кривой (3.45), изображенному на фиг. 33 и 34. В области 1 и 15 соответствующие функции  $t$  и  $s$  определяются (§ 13) решением за-

<sup>1</sup> Аналитически область на фиг. 34 соответствует тому, что за независимые переменные для каждой из частей волны приняты соответствующие характеристики, так, например, для установившегося движения  $k$  и  $l$  — область 8.

дачи Коши для уравнений (3.10). Области 5 и 11 соответствуют участкам прямой волны. Эти волны могут быть определены по заданным значениям функции  $\xi(t)$  или, что то же, функции  $t = \pi_1(F)$ , как это было показано выше (§ 13). Область 8 соответствует установившемуся движению, уравнение которого  $U = u_1$ ,  $F = f_1$ , где  $u_1$  и  $f_1$  определяются решением уравнений  $U + \lambda(F) = \xi_1$  и  $U - \lambda(F) = \eta_1$ . В областях 3 и 13 соответствующие функции  $t$  и  $s$  определяются из уравнений (3.10) по данным значениям на двух характеристиках (§12). Значения  $t$  и  $s$  вдоль характеристик  $K_1K_2$  и  $L_3K_4$  представляют собой значения этих функций вдоль соответствующих характеристических совокупностей второго семейства у прямой волны. Эти значения определяются из формул (2.43) и (2.15). Области 2 и 14 соответствуют участкам тех же прямых волн, что и области 5 и 11. Эти волны сопрягаются с волнами, соответствующими решениям в областях 1 и 15, по тем же характеристическим совокупностям второго семейства. Последнее заключение следует из совпадения значений  $t$  и  $s$ , соответствующих областям 1, 3, 5 и 2 в точке  $K_1$ , и значений этих функций, соответствующих областям 11, 13, 15 и 14 в точке  $K_4$ . Области 6 и 10 соответствуют участкам обратной волны. Эти участки определяются по заданным значениям функции  $\eta(t)$  или, что то же,  $t = \pi_2(F)$  вдоль характеристик  $M_{02}M_{12}$  и  $M_{43}M_{53}$ . Значения функций  $s$  и  $t$  в областях 4, 7 и 9, 12 определяются построением решений уравнений (3.10) по значениям, которые имеют эти функции вдоль характеристик  $M_{40}M_{42}$ ,  $M_{42}M_{52}$  и  $M_{03}M_{13}$ ,  $M_{13}M_{15}$ . Если не происходит опрокидывания ни в одной из частей волны, то определенные таким образом функции  $t$  и  $s$  отображают область, изображенную на фиг. 34, на однолиственную область в плоскости  $ts$ .

Полученное неустановившееся движение можно представить себе как возникшее в результате встречи двух волн противоположного направления. Мгновенный профиль этих волн в начальный момент изображен на фиг. 35. Соответствующая область в плоскости  $\xi\eta$  может быть получена путем сжатия, параллельного осям координат, из области, изображенной на фиг.



Фиг. 35.

34. В областях  $\gamma$  функции  $t$  и  $s$  определяются по их значениям на двух характеристиках; в областях  $\alpha$  и  $\beta$  они определяются в виде (3.42) и (3.43) по значениям на характеристиках первого и второго семейств; в области  $\epsilon$  имеем  $U = u_1$  и  $F = f_1$ . На фиг. 35 изображен начальный момент.

Дальнейшее движение легко представить себе путем построения всех возможных мгновенных профилей. Они будут последовательно иметь следующий вид (слева направо):

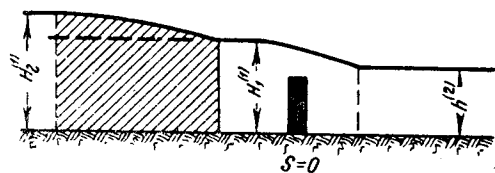
$$\begin{aligned}
 & (\alpha_2 \epsilon_2 \alpha_1 \gamma_1 \beta_1 \epsilon_1 \beta_2), & (\alpha_2 \epsilon_2 \alpha_1 \gamma_1 \alpha_3 \epsilon_1 \beta_2), & (\alpha_2 \epsilon_2 \alpha_1 \gamma_1 \alpha_3 \gamma_2 \beta_2), \\
 & (\alpha_2 \epsilon_2 \beta_3 \gamma_1 \alpha_3 \gamma_2 \beta_2), & (\alpha_2 \epsilon_2 \beta_3 \epsilon_3 \alpha_3 \gamma_2 \beta_2), & (\alpha_2 \epsilon_2 \beta_3 \epsilon_3 \beta_4 \gamma_2 \beta_2), \\
 & (\alpha_2 \gamma_3 \beta_3 \epsilon_3 \beta_4 \gamma_2 \beta_2), & (\alpha_2 \gamma_3 \alpha_4 \epsilon_3 \beta_4 \gamma_2 \beta_2), & (\alpha_2 \gamma_3 \alpha_4 \gamma_4 \beta_4 \gamma_2 \beta_2).
 \end{aligned}$$

В зависимости от длин отдельных частей волны этот порядок может несколько измениться.

Совершенно аналогично могут быть рассмотрены и другие случаи. Если вдоль участка кривой (3.45), который соответствует  $\xi = \text{const}$  или  $\eta = \text{const}$ , функция  $t$  имеет экстремум, то соответствующую область надо рассматривать как многолистную и необходимо ввести новые переменные  $x$  и  $y$ , как это было показано в предыдущем случае, т. е. отобразить соответствующую многолистную область на однолистную.

### § 16. Задача об отражении

Рассмотрим следующую задачу [35]. Пусть в призматическом канале распространяется прямая волна, причем в сечении  $s=0$  канал испытывает внезапное изменение формы и размеров поперечного сечения (фиг. 36). В част-



Фиг. 36.

ности, в сечении  $s=0$  канал может испытывать внезапное расширение или сужение, или в сечении  $s=0$  может находиться стенка, плотина или плотина с отверстиями и водосливами.

Когда фронт прямой волны достигнет сечения  $s=0$ , возникнет новая

волна, которую в дальнейшем мы будем называть отраженной. Фронт отраженной волны будет распространяться в сторону отрицательных значений  $s$ . Закон распространения этого фронта определяется уравнениями (2.43) и (2.15). Значение параметра  $\tau$  определяется моментом возникновения отраженной волны.

Допустим сначала, что прямая волна состоит либо из простого подъема уровня, либо из простого понижения уровня и заканчивается установившимся движением. Рассмотрим граничные условия, которыми определяется отраженная волна в различных случаях. Предположим, что в сечении  $s=0$  канал испытывает внезапное расширение или сужение, причем за сечением  $s=0$  он снова становится призматическим. Назовем часть канала до сечения  $s=0$  первой, а после сечения  $s=0$  — второй, и будем все величины отмечать соответствующими индексами. Вблизи сечения  $s=0$  движение жидкости не будет уже медленно изменяющимся, и к этому участку не приложимы уравнения (2.1). Для того, чтобы учесть влияние внезапного изменения сечения русла, мы составим некоторые приближенные уравнения. Отметим индексом „1“ величины, относящиеся к части канала слева от сечения  $s=0$  (фиг. 36), а индексом „2“ — величины справа от этого сечения.

Первое из этих уравнений выражает равенство расхода слева и справа от сечения  $s=0$ :

$$F^{(1)} U^{(1)} = F^{(2)} U^{(2)}. \quad (3.51)$$

Кроме того, в случае, когда русло в сечении  $s=0$  испытывает просто расширение или сужение, кривая свободной поверхности непрерывна. Откуда

$$H^{(1)} = H^{(2)} + \Delta h^{(2)},$$

где  $\Delta h^{(2)}$  — высота ступеньки, если в сечении  $s=0$  дно канала имеет излом. Если линия дна непрерывна, то  $\Delta h^{(2)}=0$ .

Во второй части канала, начиная с момента отражения, начинает распространяться прямая волна, и, следовательно, между средней скоростью и глубиной существует соотношение (2.15):

$$U^{(2)} = \lambda(F^{(2)}) - \lambda(f^{(2)}) + u^{(2)},$$

где  $f^{(2)}$  и  $u^{(2)}$  отвечают первоначальному установившемуся движению. В качестве известного приближения можно считать, что это соотношение имеет место и в сечении  $s=0$ .

Исключая из предыдущих уравнений  $F^{(2)}$ ,  $H^{(2)}$  и  $U^{(2)}$ , получим зависимость вида

$$U^{(1)} = \Phi(F^{(1)}). \quad (3.52)$$

Если в сечении  $s=0$  находится стенка или плотина с отверстиями и водосливами или щель, то вблизи этого сечения движение не является медленно изменяющимся. При установившемся движении между  $U$  и  $F$  существует соотношение вида (3.52), характеризующее сооружение в этом сечении. Так как мы с самого начала предположили, что изменение глубины и скорости в данном сечении происходит весьма медленно, то

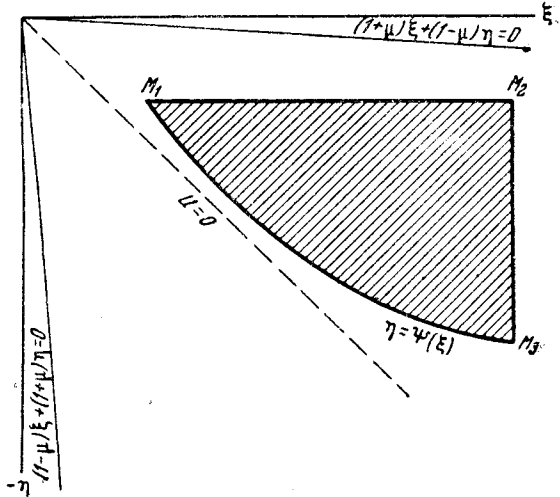
можно считать, что это соотношение сохраняется и при неустановившемся движении. Выражая в (3.52)  $U$  и  $F$  через  $\xi$  и  $\eta$  (3.3), получим:

$$\eta = \Psi(\xi). \quad (3.53)$$

Таким образом во всех случаях мы имеем для определения отраженной волны условие:  $s=0$  на кривой  $\eta = \Psi(\xi)$  (3.53).

Рассмотрим сначала случай, когда  $\eta = \Psi(\xi)$  монотонная функция. На фиг. 37 точка  $M_1$  изображает первоначальный установившийся режим в канале, изображенный на фиг. 36. Отрезок прямой  $M_1M_2$  — прямую волну, а точка  $M_2$  — установившееся движение, которым заканчивается прямая волна. Отраженная волна определяется в области криволинейного треугольника  $M_1M_2M_3$ . Мы предположим сначала, что этот треугольник расположен в области, определенной неравенствами (3.23). Вдоль прямой  $M_1M_2$  известны значения  $t$  и  $s$  вдоль соответствующей характеристики (2.43), (2.15), а вдоль кривой  $\eta = \Psi(\xi)$   $s=0$ . Эти данные отвечают так называемой смешанной задаче для уравнений (3.10).

Соответствующее решение уравнения (3.17) или аналогичного ему уравнения, получающегося исключением  $t$  из уравнений (3.10), может быть построено методом последовательных приближений (Гурса [9], т. III, гл. XXVI,



Фиг. 37.

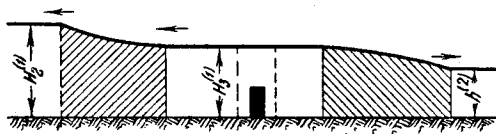
§ 500). После этого соответствующие значения  $t$  определяются из уравнений (3.10) квадратурой. Приближенный метод решения уравнений (3.10) при условиях рассматриваемой задачи будет дан в гл. 5.



Фиг. 38.



Фиг. 39.



Фиг. 40.

На фиг. 38 изображена отраженная волна. Начиная с того момента, когда фронт отраженной волны достигнет следующего за прямой волной установившегося движения, отраженная волна распадается на две различные части. Одна из частей отраженной волны будет обратной волной (фиг. 39), фронт которой распространяется по установившемуся движению ( $U_2^{(1)}$ ,  $H_2^{(1)}$ ), соответствующему точке  $M_2$ . На фиг. 37 эта волна изображается отрезком прямой  $M_2M_3$ . Через некоторое время вся отраженная волна превратится в обратную волну и вблизи сечения  $s=0$  возникнет установившееся движение, изображенное на фиг. 37 точкой  $M_3$  (ср. фиг. 40).

Определим, к какому типу волн в зависимости от условий в сечении  $s=0$  принадлежит отраженная волна.

Дифференцируя по направлению касательной в какой-нибудь точке кривой  $\eta = \Psi(\xi)$ , имеем:

$$\frac{\partial s}{\partial \xi} + \frac{\partial s}{\partial \eta} \Psi'(\xi) = 0.$$

Отсюда, пользуясь (3.10), имеем:

$$\frac{\partial t}{\partial \eta} = - \frac{U - \sqrt{\frac{gF}{B}}}{U + \sqrt{\frac{gF}{B}}} \frac{\partial t}{\partial \xi} \Psi'(\xi). \quad (3.54)$$

Знак производной  $\frac{\partial t}{\partial \xi}$  зависит от характера прямой волны, испытывающей отражение. Если эта волна отвечает повышению уровня, то  $\frac{\partial t}{\partial \xi} > 0$ , а если понижению, то  $\frac{\partial t}{\partial \xi} < 0$ . Если  $\Psi'(\xi) < 0$ , то мы будем говорить, что русло испытывает сужение, если же  $\Psi'(\xi) > 0$ , то — расширение. Если отраженная волна соответствует спокойному состоянию потока, то из (3.54) следует, что при отражении в сечении, в котором русло испытывает сужение [ $\Psi'(\xi) < 0$ ], возникает либо волна, принадлежащая к смешанному типу (§ 14), если прямая волна соответствовала повышению уровня, либо волна, не испытывающая разрушения, если прямая волна отвечала понижению уровня.

В случае, если русло испытывает внезапное расширение [ $\Psi'(\xi) > 0$ ] в сечении  $s=0$ , то при отражении прямой волны повышения возникает волна

типа прямой волны повышения, а в случае отражения прямой волны понижения — волна типа обратной волны повышения.

Перейдем теперь к рассмотрению общего случая. Вдоль характеристики второго семейства у прямой волны (2.43), (2.15)  $t$  и  $s$  являются функциями от  $F$  или, что то же, от  $\xi$ . Обозначим через  $s = x(\xi)$  зависимость  $s$  от  $\xi$  вдоль этой характеристики и через  $\xi = f_1(s)$  функцию, обратную по отношению к  $s = x(\xi)$ . Снимем теперь ограничения, наложенные на прямую волну и на зависимость  $\eta = \Psi(\xi)$ . В общем случае допустим, что функция  $\xi = f_1(s)$  имеет  $m$  экстремумов (прямая волна соответствует  $m + 1$  участку последовательных подъемов и понижений уровня), функция  $\eta = \Psi(\xi)$  также имеет несколько экстремумов. Отметим все точки на кривой  $\eta = \Psi(\xi)$ , соответствующие как экстремумам функции  $\xi = f_1(s)$ , так и экстремумам функции  $\eta = \Psi(\xi)$ . Обозначим точки, соответствующие экстремумам функции  $\xi = f_1(s)$  через  $D$  с одним значком, а экстремумы функции  $\Psi(\xi)$  — через  $C$  с двумя значками. Точки  $D$  нумеруются в том порядке, в каком они встречаются при изменении  $s$ . Таким образом эти точки будут:

$$E_0, D_1, D_2, \dots, D_i, D_{i+1}, \dots, D_m, E.$$

Первый значок у точки  $C$  будет указывать номер промежутка  $D_i D_{i+1}$ , в пределах которого лежит данная точка. Этот значок совпадает со значком точки  $D$ , лежащей в начале этого промежутка. Второй значок указывает порядковый номер этой точки в промежутке  $D_i D_{i+1}$ , причем эти точки отмечаются в том порядке, в котором они встречаются при изменении  $s$ . Таким образом, в промежутке  $D_i D_{i+1}$  будут лежать точки

$$C_{i1}, C_{i2}, \dots, C_{ij}, \dots, C_{in_i}.$$

Одна и та же точка, соответствующая экстремуму функции  $\Psi(\xi)$ , будет обозначена столькими буквами  $C$ , скольким промежуткам  $D_i D_{i+1}$  она принадлежит. Всего точек  $C_{ij}$  будет

$$n_0 + n_1 + \dots + n_m = n.$$

Возьмем прямоугольный лист бумаги и две его стороны примем за оси прямоугольной системы координат  $x, y$ , имеющие ту же ориентировку, что и система координат  $\xi, \eta$ . По направлению оси  $x$  отложим отрезки, равные промежуткам изменения  $\xi$ , в том порядке, в котором они перенумерованы. Всего таких отрезков будет  $n + m + 1$ . На оси  $y$  отложим в том же порядке соответствующие промежутки изменения  $\eta$ . Через точки деления на осях  $x$  и  $y$  проведем прямые, параллельные осям координат. Эти прямые разобьют область  $xy$  на  $(n + m + 1)^2$  прямоугольников. Выберем из них  $n + m + 1$  прямоугольников так, как это было указано в предыдущем параграфе, и нанесем в каждом из них соответствующий участок кривой  $\eta = \Psi(\xi)$ . Сложим теперь лист  $xy$ , перегибая его на  $180^\circ$  вокруг прямых, параллельных оси  $x$  и проходящих через точки  $C_{ij}$ , и вокруг прямых, параллельных оси  $y$ , проходящих через точки  $D_k$ . Мы получим таким образом многолистную поверхность, состоящую из  $(n + 1)(m + 1)$  листов. Кривая в плоскости  $xy$ , изображающая сечение  $s = 0$ , разделяет область  $xy$  на две части, одна

из которых соответствует  $s > 0$ , а другая  $s < 0$ . В каждой из этих частей находится  $n + m + 1$  криволинейных треугольников, прилежащих к этой кривой, и  $\frac{(n + m + 1)(n + m)}{2}$  прямоугольников. Покроем штриховкой все треугольники и прямоугольники, соответствующие  $s < 0$ . На каждом листе многолистной поверхности, на котором имеется область, покрытая штриховкой, определим значения функций  $t$  и  $s$  (в заштрихованной области). В областях, ограниченных криволинейными треугольниками, определяем функцию  $s$  из уравнения (3.17) при условиях, соответствующих смешанной задаче: на криволинейной стороне треугольника  $s = 0$ , а на характеристике  $\eta = \text{const}$   $s$  принимает заданное значение. В областях, представляющих собой прямоугольники, решение может быть получено по заданным значениям функций  $t$  и  $s$  на двух характеристиках (§ 12).

### § 17. Соответствующие глубины и скорости

В предыдущих параграфах было показано, как определить неустановившееся движение, происходящее в результате встречи двух волн разного направления (§ 12), как определить волну по наблюдениям в каком-нибудь сечении канала (§ 13 и 15) и, наконец, как определить неустановившееся движение, возникающее при отражении волны одного направления. При рассмотрении всех этих задач некоторые заключения, относящиеся к экстремальным значениям скоростей и глубин и имеющие как раз наибольший практический интерес, можно получить, не производя построения самого решения, а рассматривая лишь область его существования в плоскости  $\xi\eta$ .

Начнем с задачи об отражении. Если прямая волна, испытывающая отражение в сечении  $s = 0$ , отвечает простому подъему или понижению уровня, то по истечении некоторого времени (предполагая, конечно, что за это время волна не испытывает разрушения) вблизи сечения  $s = 0$  возникает установившийся режим (фиг. 40). Глубину и скорость этого режима ( $U_3, H_3$ ) мы назовем соответствующими глубине и скорости установившегося движения, следующего за прямой волной ( $H_2, U_2$ ). На фиг. 37 соответствующие глубины и скорости изображаются точками  $M_2$  и  $M_3$ . Значения  $H_3$  и  $U_3$  получаются путем решения системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} U &= \Phi(F), \quad [\eta = \Psi(\xi)], \\ U + \lambda(F) &= U_2 + \lambda(F_2), \end{aligned} \right\} \quad (3.55)$$

где  $U = \Phi(F)$  есть функция (3.52), определяющая данную зависимость скорости от глубины в сечении  $s = 0$ .

Рассмотрим вообще какую-нибудь глубину  $H^*$  и соответствующую ей скорость  $U^*$  прямой волны. Мы назовем глубину  $H_0$  и скорость  $U_0$  соответствующими глубине  $H^*$  и скорости  $U^*$ , если, обрывая прямую волну на глубине  $H^*$  и заканчивая ее на этой глубине установившимся режимом, мы получим после отражения, по истечении некоторого времени, у сечения  $s = 0$  установившееся движение с глубиной  $H_0$  и средней скоростью  $U_0$ . Очевидно, соответствующие глубины определяются путем решения той же системы уравнений (3.55), где только  $U_2$  и  $F_2$  надо заменить на  $U^*$  и  $H^*$ .

Остановимся на некоторых частных случаях.

Пусть в сечении  $s=0$  находится стенка. Тогда зависимость (3.52) превращается в условие

$$U=0.$$

Из второго уравнения (3.55) получаем

$$\lambda(F) = U^* + \lambda(F^*). \quad (3.56)$$

Решая это уравнение относительно  $F$ , получим глубину у стенки после отражения, соответствующую глубине  $H^*$ . Если прямая волна заканчивается глубиной  $H^*$ , то после отражения волны у стенки будет покоящаяся жидкость с глубиной  $H_0$ . Так как вдоль прямой волны (2.15)

$$U^* = \lambda(F^*) - \lambda(f),$$

то уравнение (3.56) можно переписать в виде

$$\lambda(F_0) = 2\lambda(F^*) - \lambda(f).$$

В частности, для параболических русел имеем, пользуясь (2.18):

$$\sqrt{H_0} = 2\sqrt{H^*} - \sqrt{h},$$

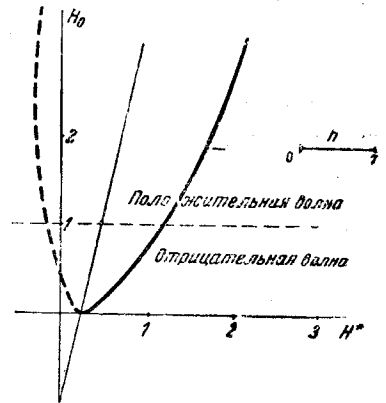
откуда

$$H_0 = 4H^* - 4\sqrt{H^*h} + h. \quad (3.57)$$

График зависимости  $H_0$  от  $H^*$  изображен на фиг. 41. В табл. 1 даны

Таблица 1

$H^*$	$H_0$	$H^*$	$H_0$	$H^*$	$H_0$
0.25	0	1.25	1.55	2.25	4.00
0.50	0.17	1.50	2.12	2.50	4.68
0.75	0.54	1.75	2.72	2.75	5.32
1	1	2	3.36	3	6.08



Фиг. 41.

соответствующие значения  $H_0$  и  $H^*$  при  $h=1$ . График функции (3.57) — парабола. Уравнение оси этой параболы

$$H_0 = 4H^* - \frac{15}{17}h,$$

а координаты вершины

$$H_0 = \frac{1}{289}h, \quad H^* = \frac{64}{289}h;$$

при  $H_0=0$   $H^* = \frac{1}{4}h$ .



Формула (3.57) справедлива, конечно, лишь в том случае, когда волна не испытывает опрокидывания. Например, в случае волны понижения формула (3.57) всегда справедлива при  $H^* > \frac{1}{4} h$ . В случае волны повышения легко указать такие значения  $H^*$ , выше которых формула (3.57) теряет свой смысл. Если фронт отраженной волны не может распространяться против течения, то у сечения  $s=0$  произойдет разрушение волны. Для того, чтобы это не имело места, должно быть выполнено условие

$$U - \sqrt{\frac{gF}{B}} < 0,$$

или заменяя  $U$  его значением из уравнения прямой волны (2.15), получим:

$$\lambda(F) - \lambda(f) - \sqrt{\frac{gF}{B}} < 0. \quad (3.58)$$

В частности, для параболических русел, пользуясь (2.18) и (2.19), имеем:

$$H^* < \left(\frac{2n}{2n-1}\right)^2 h. \quad (3.59)$$

В частности, для русла прямоугольного сечения ( $n=1$ )  $H^* < 4h$ . Покажем теперь, что при  $H^*$  близких к  $h$  формула (3.57) совпадает с обычной формулой, определяющей глубину у стенки после отражения длинной волны малой амплитуды.

Полагая в уравнении (3.57)  $H^* = h + \delta$  и отбрасывая члены высшего порядка малости по сравнению с  $\delta$ , получим:

$$H_0 = h + 2\delta.$$

Рассмотрим теперь случай, когда русло испытывает внезапное расширение или сужение. Для простоты рассмотрим случай, когда первая и вторая части канала имеют прямоугольное поперечное сечение (фиг. 42) и при установившемся движении в обеих частях канала была одинаковая глубина. В этом случае  $U^{(1)}b_1 = U^{(2)}b_2$ , а в силу формулы (2.20)  $U^{(2)} = 2\sqrt{gH} - 2\sqrt{gh} + u^{(2)}$  (прямая волна во второй части канала), откуда, исключая  $U^{(2)}$ , получим первое уравнение (3.55) в виде:

$$U = \frac{b_2}{b_1} (2\sqrt{gH} - 2\sqrt{gh} + u^{(2)}). \quad (3.60)$$

Заменяя  $U$  и  $H$  их выражениями через  $\xi$  и  $\eta$  из (2.18), (3.3) и подставляя

$u^{(2)} = \frac{u^{(1)}b_1}{b_2}$ , имеем:

$$\eta = \frac{b_2 - b_1}{b_2 + b_1} \xi + \frac{2b_2}{b_1 + b_2} \eta_0 - 2u^{(1)} \frac{b_2 - b_1}{b_2 + b_1}, \quad (3.61)$$

где

$$\eta_0 = u^{(1)} - 2\sqrt{gh}.$$

Обозначим через  $H^*$  и  $U^*$  глубину и среднюю скорость прямой волны, а через  $H_0$  и  $U_0$  — соответствующие глубину и среднюю скорость. Для  $\xi$  имеем по формулам (2.15), (2.18) и (3.3):

$$\xi = 4\sqrt{gH^*} - 2\sqrt{gh} + u^{(1)}.$$

Подставляя это выражение в (3.61), получаем для  $\eta$ :

$$\eta = \frac{b_2 - b_1}{b_2 + b_1} (4\sqrt{gH^*} - 2\sqrt{gh} - u^{(1)}) + \frac{2b_2}{b_1 + b_2} (u^{(1)} - 2\sqrt{gh}).$$

Вместе с тем

$$\xi = U_0 + 2\sqrt{gH_0}, \quad \eta = U_0 - 2\sqrt{gH_0}.$$

Итак, для  $U_0$  и  $H_0$  получаем:

$$\left. \begin{aligned} U_0 &= \frac{2b_2}{b_1 + b_2} \left( U^* - \frac{b_2 - b_1}{2b_2} u^{(1)} \right), \\ H_0 &= \frac{4b_1^2 H^* + 4b_1(b_2 - b_1)\sqrt{H^*h} + (b_2 - b_1)^2 h}{(b_2 + b_1)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.62)$$

Если в сечении  $s=0$  находится стенка, то, замечая, что в этом случае  $u^{(1)}=0$  и  $b_2 \rightarrow 0$ , имеем:

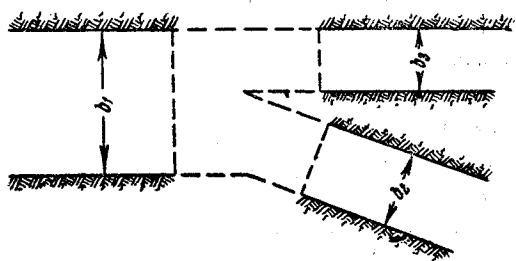
$$U_0 = 0, \quad H_0 = 4H^* - 4\sqrt{H^*h} + h.$$

В случае наличия весьма широкого бассейна  $b_2 \rightarrow \infty$  имеем:

$$U_0 = 2U^* - u^{(1)}, \quad H_0 = h. \quad (3.63)$$

Точно так же можно рассмотреть случай разделения русла на несколько рукавов. Рассмотрим разделение русла на два рукава.

Поперечное сечение как основного русла, так и рукавов, мы предположим прямоугольным и глубину во всех руслах при установившемся движении одинаковой (фиг. 43).



Фиг. 43.

Начальные скорости удовлетворяют соотношению

$$u^{(1)}b_1 = u^{(2)}b_2 + u^{(3)}b_3.$$

Записывая условия равенства суммы расходов второго и третьего канала расходу первого в сечении  $s=0$ , имеем:

$$U^{(1)}b_1 = b_2(2\sqrt{gH} - 2\sqrt{gh} + u^{(2)}) + b_3(2\sqrt{gH} - 2\sqrt{gh} + u^{(3)}).$$

Заменяя  $U^{(1)}$  и  $H$  их выражениями через  $\xi$  и  $\eta$ , имеем:

$$\eta = \frac{b_2 + b_3 - b_1}{b_1 + b_2 + b_3} \xi + \frac{2(b_2 + b_3)}{b_1 + b_2 + b_3} \eta_0 - 2 \frac{b_2 + b_3 - b_1}{b_1 + b_2 + b_3} u^{(1)}, \quad (3.64)$$

где

$$\eta_0 = u^{(1)} - 2\sqrt{gh}.$$

Для  $U_0$  и  $H_0$  получаем:

$$\left. \begin{aligned} U_0 &= \frac{2(b_2 + b_3)}{b_1 + b_2 + b_3} \left[ U^* - \frac{(b_2 + b_3) - b_1}{2(b_2 + b_3)} u^{(1)} \right], \\ H_0 &= \frac{4b_1^2 H^* + 4b_1(b_2 + b_3 - b_1) \sqrt{H^* h} + (b_2 + b_3 - b_1)^2 h}{(b_1 + b_2 + b_3)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.65)$$

Аналогичным образом можно рассмотреть случаи каналов параболического и трапециoidalного сечения.

Остановимся еще на случае, когда в сечении  $s=0$  находится стенка с водосливами. Пусть общая длина водосливов  $L$ . Для простоты мы предположим, что канал прямоугольный и что высота водосливов над дном канала одинаковая и равна  $d$ . Значение средней скорости, соответствующей глубине  $H$ , определяется из формулы

$$U = \beta \frac{L}{b} \frac{(H-d)^{\frac{3}{2}}}{H}, \quad (3.66)$$

где  $\beta$  — коэффициент, который определяется в теории водосливов.<sup>1</sup> Так как мы предполагаем, что изменение средней скорости и высоты уровня происходит весьма медленно, то можно считать, в порядке приближения, что соотношение (3.66) имеет место и при неустановившемся движении. Заменяя  $U$  и  $H$  их выражениями через  $\xi$  и  $\eta$  из формул (3.3), получим:

$$\xi + \eta = \beta \frac{32gL}{b(\xi - \eta)^2} \left[ \frac{(\xi - \eta)^2}{16g} - d \right]^{\frac{3}{2}}.$$

Полученное уравнение есть зависимость (3.53), и мы можем определить соответствующие глубины так, как это показано выше. В работе В. М. Маккавеева<sup>2</sup> можно найти различные случаи отражения, имеющие практическое значение и могущие быть рассмотрены аналогичным образом.

Если  $H^*$  и  $U^*$  отвечают наибольшей или наименьшей глубине прямой волны, то значения  $H_0$  и  $U_0$ , определяемые из предыдущих уравнений, дают соответственно наибольшие или наименьшие значения глубины и средней скорости в сечении  $s=0$ .

В §§ 13 и 15 было показано, что всякое неустановившееся движение в канале, определяющееся по наблюдениям, произведенным в каком-нибудь сечении, можно представить себе как происшедшее в результате встречи двух волн разного направления. Эти волны могут быть определены после построения решения уравнений (3.10), соответствующего данному неустановившемуся движению. Однако экстремальные значения средней скорости и глубины каж-

<sup>1</sup> Маккавеев В. М. Вопросы гидромеханического анализа невских наводнений. Зап. Гос. гидрол. ин-та, I, 1926.

<sup>2</sup> В своей работе „Вопросы гидромеханического анализа невских наводнений“ (Зап. Гос. гидрол. ин-та, I, 1926) В. М. Маккавеев на ряду с другими вопросами рассматривает и вопрос о частичном отражении длинных волн „конечной амплитуды“. При решении задачи В. М. Маккавеев пользуется приемом наложения волн „бесконечно малой амплитуды“. Однако этот прием в рассматриваемом случае, когда имеет место отражение, не дает возможности построить соответствующий интеграл дифференциальных уравнений длинных волн „конечной амплитуды“ и может, повидимому, рассматриваться только как дающий известное приближение.

дой из этих волн можно получить на основании произведенных наблюдений, не производя построения соответствующего решения уравнений (3.10). Обозначим через  $u$  и  $f$  среднюю скорость и площадь живого сечения, соответствующие тому установившемуся движению в канале, которое имело место до появления в канале волны, вызвавшей неустановившееся движение. В плоскости  $\xi\eta$  этому установившемуся движению соответствует точка  $M(\xi_0, \eta_0)$ . В этой плоскости отрезки прямой  $\eta = \eta_0$  соответствуют прямой волне, нарушающей данное установившееся движение, а отрезки прямой  $\xi = \xi_0$  — обратной волне.

Вдоль прямой волны имеем:

$$U - \lambda(F) = \eta_0.$$

Так как  $\xi = U + \lambda(F)$ , то вдоль прямой волны

$$\xi = \eta_0 + 2\lambda(F). \quad (3.67)$$

Так как  $\lambda'(F) > 0$ , то площадь живого сечения изменяется в зависимости от  $\xi$  монотонно. Наибольшим и наименьшим значениям площади живого сечения соответствуют наибольшие и наименьшие значения  $\xi$ . Аналогичное заключение справедливо и для средней скорости. Для обратной волны имеем:

$$U + \lambda(F) = \xi_0$$

и, следовательно, вдоль обратной волны

$$\eta = \xi_0 - 2\lambda(F). \quad (3.68)$$

Вдоль обратной волны  $F$  и  $\eta$  изменяются в разных направлениях. Наибольшим и наименьшим значениям  $F$  соответствуют наименьшие и наибольшие значения  $\eta$ . Нанесем в плоскости  $\xi\eta$  кривую (3.45), соответствующую произведенным в канале наблюдениям (фиг. 31). Напомним, что канал мы считаем призматическим и простирающимся в обе стороны до бесконечности. Будем считать, что первоначально, т. е. до появления изучаемых длинных волн, в канале существовало установившееся движение. Начало кривой (3.45) — точка  $E_0$  — должна иметь координаты  $\xi = u + \lambda(f)$  и  $\eta = u - \lambda(f)$ . Отметим, что, как это видно из приводимых ниже формул, прямая и обратная волны, на которые мы разлагаем рассматриваемое неустановившееся движение, существенным образом зависят от первоначального установившегося движения в канале.

Для определенности остановимся на рассмотрении неустановившегося движения, соответствующего подъему уровня над ординаром. Отметим на полученной в плоскости  $\xi\eta$  кривой две точки: одну, соответствующую наибольшему значению  $\xi$ , и другую — наименьшему значению  $\eta$ . Обозначим соответствующие первой из этих точек значения  $U$ ,  $F$  и  $H$  через  $U_0'$ ,  $F_0'$  и  $H_0'$ , а второй — через  $U_0''$ ,  $F_0''$  и  $H_0''$ . Наибольшие значения  $U$ ,  $F$  и  $H$  вдоль прямой волны обозначим через  $U^*$ ,  $F^*$  и  $H^*$ , а вдоль обратной —  $U_*$ ,  $F_*$  и  $H_*$ . Из (3.67), принимая во внимание (3.3), найдем:

$$\lambda(F^*) = \frac{1}{2} [U_0' + \lambda(F_0')] - \frac{1}{2} [u - \lambda(f)].$$

Для русел параболического сечения имеем:

$$\left. \begin{aligned} H_* &= \frac{1}{16} \left[ 2(\sqrt{H_0'} + \sqrt{h}) + \frac{1}{\sqrt{ng}} (U_0' - u) \right]^2 \\ U_* &= \frac{1}{2} (U_0' + u) + \sqrt{gn} (\sqrt{H_0'} - \sqrt{h}). \end{aligned} \right\} \quad (3.69)$$

Точно так же в силу формул (3.68) и (3.3) найдем:

$$\lambda(F_*) = \frac{1}{2} [u + \lambda(f)] - \frac{1}{2} [U_0'' - \lambda(F_0'')].$$

Для русел параболического сечения:

$$\left. \begin{aligned} H_* &= \frac{1}{16} \left[ 2(\sqrt{H_0''} + \sqrt{h}) - \frac{1}{\sqrt{gn}} (U_0'' - u) \right]^2 \\ U_* &= \frac{1}{2} (U_0'' + u) - \sqrt{gn} (\sqrt{H_0''} - \sqrt{h}). \end{aligned} \right\} \quad (3.70)$$

Формулы (3.69) и (3.70), а также формулы, определяющие соответствующие значения глубины и скорости для случая отражения заданной волны одного направления, (3.57), (3.62), (3.63) или (3.65) позволяют в некоторых случаях решить задачу о предсказании изменения высоты уровня при паводке после возведения в канале какого-нибудь гидротехнического сооружения.

Допустим, что призматический канал, в котором мы изучаем неустановившееся движение, простирается в одном направлении до бесконечности, а в другом направлении, в сечении  $s=l$ ,  $l>0$ , заканчивается каким-нибудь сложным разветвлением или каким-нибудь сооружением. Допустим, что неустановившееся движение вызывается прямой водной, распространяющейся в канале. Эта волна испытывает в сечении  $s=l$  отражение. Пусть в сечении  $s=0$  находится наблюдатель, производящий измерения средней скорости и глубины. На основании произведенных этим наблюдателем измерений можно, как было показано выше, определить как отраженную волну, так и прямую волну, вызвавшую неустановившееся движение, в частности, можно определить наибольшую глубину этой прямой волны. Допустим, что в сечении  $s=0$  возводится какое-нибудь гидротехническое сооружение — плотина или стенка с отверстиями и водосливами. Требуется определить то неустановившееся движение в канале, которое вызвала бы та же прямая волна после возведения в канале этого сооружения.

Выражение „та же прямая волна“ не требует пояснений лишь в том случае, когда первоначальный установившийся режим в канале не изменяется после возведения сооружения. Если же вследствие возведения сооружения или по каким-нибудь другим причинам установившийся режим в канале изменяется, то при прочих одинаковых условиях мы получим уже другую прямую волну. В этом случае надо указать условия, определяющие прямую волну. Такими условиями могут быть изменения высоты уровня или расхода в каком-нибудь сечении канала, достаточно удаленном от сооружения.

Если прямая волна определена, то неустановившееся движение в канале, коль скоро известно сооружение в сечении  $s=0$  (следовательно, известна

зависимость  $U = \Phi(F)$ , соответствующая этому сооружению), определяется, как это было показано в предыдущих параграфах. В частности, экстремальные значения глубины и средней скорости у сооружения определяются непосредственно по экстремальным значениям  $H^*$  и  $U^*$  прямой волны. Пользуясь формулами, определяющими соответствующие глубины и скорости, для предсказания изменения высоты уровня при неустановившемся движении после возведения в канале какого-нибудь сооружения, надо всегда принимать во внимание, что эти формулы дают решение лишь в том случае, когда канал простирается достаточно далеко в ту сторону, откуда появляется прямая волна. Эти формулы совершенно не учитывают тех изменений, которые произойдут вследствие отражения „отраженной волны“ в этом конце канала.

### § 18. Координаты Лагранжа

Для доказательства теоремы IV в общем случае, т. е. не только для спокойных, но и для бурных течений, а также для того, чтобы перенести все результаты, полученные в §§ 12, 13, 15, 16 и 17, на случай, когда область в плоскости  $\xi\eta$ , в которой рассматриваются решения уравнений (3.10), не расположена в части плоскости, определяемой неравенствами (3.23), и когда следовательно движение жидкости бурное, — удобно отнести уравнения (2.1) к переменным Лагранжа.

Рассмотрим частицы жидкости, расположенные в момент  $t = t_0$  в некотором поперечном сечении канала, и обозначим через  $a$  параметр, характеризующий их положение по длине канала в этот момент.

Положение рассматриваемых частиц в момент  $t > t_0$  определяется зависимостью

$$s = \varphi(a, t),$$

выражающей закон движения этих частиц. Имеем таким образом

$$\frac{\partial s}{\partial t} = U(a, t).$$

Примем за новые независимые переменные  $a$  и  $t$  вместо  $s$  и  $t$ . Формулы преобразования для производных от какой-нибудь функции будут тогда:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} - \frac{\frac{\partial s}{\partial t} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial a}}{\frac{\partial s}{\partial a}}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial s} = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial a} \frac{1}{\frac{\partial s}{\partial a}}, \quad (3.71)$$

где чертой отмечена функция, полученная от замены  $s$  в  $\Phi(t, s)$  его выражением через  $a$  и  $t$ .

Пользуясь (3.71), получим для уравнений (2.1) после преобразования к новым переменным следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} &= - \frac{\partial F}{\partial a} \frac{g}{B \frac{\partial s}{\partial a}}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( F \frac{\partial s}{\partial a} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.72)$$

Интегрируя второе уравнение (3.72), определим зависимость между  $s$  и  $a$  в момент  $t=t_0$  таким образом, чтобы

$$\frac{\partial s}{\partial a} = \frac{f}{F}.$$

Для этой зависимости имеем, следовательно:

$$s(a, t_0) = \int_{a_0}^a \frac{f}{F(a, t_0)} da;$$

исключая затем при помощи уравнения  $\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{f}{F}$  функцию  $F$  из первого уравнения (3.72), получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 s}{\partial a^2} \frac{gf}{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^3 \beta\left(\frac{\partial s}{\partial a}\right)} &= \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial s}{\partial a} &= \frac{f}{F}, \end{aligned} \right\} \quad (3.73)$$

где  $\beta\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right) = B(F)$ . Уравнения длинных волн в этом виде были непосредственно даны Эри [38], пользовавшимся обозначением  $s = a + \xi$ .

Обозначим:

$$\frac{\partial s}{\partial a} = \frac{f}{F} = \omega. \quad (3.74)$$

Дифференцируя второе из уравнений (3.73) по  $t$  и заменяя затем  $\frac{\partial s}{\partial t}$  через  $U$ , а  $\frac{\partial s}{\partial a}$  через  $\omega$ , получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial a} [\nu'(\omega)]^2 &= \frac{\partial U}{\partial t}, \\ \frac{\partial U}{\partial a} &= \frac{\partial \omega}{\partial t}, \end{aligned} \right\} \quad (3.75)$$

где

$$\nu(\omega) = \lambda(F). \quad (3.76)$$

Составим уравнения характеристик для уравнений (3.75).

Присоединяя к уравнениям (3.75) соотношения

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{\partial \omega}{\partial x} da + \frac{\partial \omega}{\partial t} dt, \\ du &= \frac{\partial U}{\partial x} da + \frac{\partial U}{\partial t} dt \end{aligned}$$

и решая полученную систему относительно производных от функций  $\omega$  и  $U$  по  $a$  и  $t$ , получим:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -[\nu'(\omega)]^2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ d\omega & 0 & dt & da \\ du & dx & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -[\nu'(\omega)]^2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & dt & dx \\ dt & dx & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (3.77)$$

и аналогичные выражения для других производных.

Приравнивая нулю числитель и знаменатель в (3.77), получим точно так же, как в § 7, для характеристик следующие уравнения:

*первое семейство:*

$$\left. \begin{aligned} da &= -v'(\omega) dt, \\ dU &= -v'(\omega) d\omega; \end{aligned} \right\} \quad (3.78)$$

*второе семейство:*

$$\left. \begin{aligned} da &= v'(\omega) dt, \\ dU &= v'(\omega) d\omega. \end{aligned} \right\} \quad (3.79)$$

Интегрируя вторые уравнения (3.78) и (3.79) и вспоминая равенство (3.76), получим для характеристик уравнения:

*первое семейство:*

$$\left. \begin{aligned} da &= -v'(\omega) dt, \\ U + v(\omega) &= \xi; \end{aligned} \right\} \quad (3.80)$$

*второе семейство:*

$$\left. \begin{aligned} da &= v'(\omega) dt, \\ U - v(\omega) &= \eta. \end{aligned} \right\} \quad (3.81)$$

Заметим, что формулы (3.80) и (3.81) получаются непосредственно из формул (3.1) и (3.2), пользуясь инвариантностью характеристик при преобразованиях переменных (гл. 2, § 7).

Преобразуем уравнения (3.75), принимая за независимые переменные  $\xi$  и  $\eta$ , а за неизвестные функции  $a$  и  $t$ . Так же, как в § 10, получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= v'(\omega) \frac{\partial t}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} &= -v'(\omega) \frac{\partial t}{\partial \eta}. \end{aligned} \right\} \quad (3.82)$$

Определитель преобразования, в силу (3.82), может быть представлен в виде

$$\frac{D(t, a)}{D(\xi, \eta)} = -2v'(\omega) \frac{\partial t}{\partial \xi} \frac{\partial t}{\partial \eta}.$$

Выразим определитель  $\Delta$  (3.12) через этот определитель:

$$\Delta = \frac{D(t, s)}{D(J, r)} = 2 \sqrt{\frac{g}{BF} \frac{D(t, s)}{D(\xi, \eta)}} = 2 \sqrt{\frac{g}{BF} \frac{D(t, s)}{D(t, a)} \frac{D(t, a)}{D(\xi, \eta)}}.$$

Определитель преобразования

$$\left. \begin{aligned} t &= t, \\ s &= \varphi(a, t) \end{aligned} \right\} \quad (3.83)$$

равен

$$\frac{D(t, s)}{D(t, a)} = \frac{\partial s}{\partial a} = \frac{f}{F} > 0. \quad (3.84)$$

Принимая во внимание (3.76), получим:

$$v'(\omega) = -\sqrt{\frac{g}{BF} \frac{F^2}{f}}$$

и, следовательно,

$$\Delta = 4 \frac{g}{B} \frac{\partial t}{\partial \xi} \frac{\partial t}{\partial \eta} = -4 \frac{g}{B [v'(\omega)]^2} \frac{\partial a}{\partial \xi} \frac{\partial a}{\partial \eta}. \quad (3.85)$$



Пусть

$$\left. \begin{aligned} t &= t(\xi, \eta), \\ s &= s(\xi, \eta) \end{aligned} \right\} \quad (3.86)$$

есть решение уравнений (3.10), определенное в плоскости  $\xi\eta$  в области криволинейного треугольника, образованного отрезками характеристик и кривой, которая прямыми, параллельными осям координат, пересекается только в одной точке (§ 11), и расположенного в части плоскости  $\xi - \eta > 0$  ( $F > 0$ ). Вычислим соответствующие значения  $a$ . Преобразование (3.83) вследствие (3.84) устанавливает взаимно однозначное соответствие между соответствующими областями в плоскостях  $at$  и  $st$ .

Повторяя относительно функций

$$\left. \begin{aligned} t &= t^*(\xi, \eta), \\ a &= a(\xi, \eta) \end{aligned} \right\} \quad (3.87)$$

рассуждения, приведенные в § 11 при доказательстве теоремы IV, мы убеждаемся, что до момента разрушения волны функции

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(a, t), \\ \eta &= \eta(a, t), \end{aligned}$$

обратные по отношению к функциям (3.87), однозначны. Отсюда вследствие взаимной однозначности преобразования (3.83) следует также, что функции, обратные по отношению к функциям (3.86), однозначны вплоть до момента разрушения волны. Теорема IV доказана, таким образом, полностью как для спокойных, так и для бурных течений.

При рассмотрении многолистных поверхностей в § 15 и 16 в плоскости  $\xi\eta$  мы ограничивались случаем, когда соответствующая область была расположена в части плоскости, определяемой неравенствами (3.23), т. е. когда соответствующее решение отвечало спокойному течению.

Производя преобразование (3.83) и рассматривая вместо функций  $(t, s)$  функции  $(a, t)$ , мы убеждаемся так же, как при доказательстве теоремы IV, что все заключения, полученные в § 15 и 16, справедливы и в том случае, когда область, в которой определено решение, расположена в любой части полуплоскости  $\xi - \eta > 0$ . Все заключения, полученные в § 15 и 16 относительно потоков, находящихся в спокойном состоянии, справедливы, таким образом, и для бурных потоков.