

## ГЛАВА ВТОРАЯ

### ВОЛНЫ ОДНОГО НАПРАВЛЕНИЯ. ХАРАКТЕРИСТИКИ

#### § 6. Волны одного направления

Переходя к изучению неустановившихся движений жидкости в каналах и реках, отметим еще раз их характерные черты. Напомним, что все рассматриваемые движения жидкости мы считаем одномерными, т. е. рассматриваем лишь среднюю скорость в данном поперечном сечении русла, учитывая неравенство распределения скоростей в отдельных точках поперечного сечения введением в уравнение поправочного коэффициента и полностью пренебрегая вертикальными ускорениями частиц. Кроме того, мы считаем движение жидкости медленно изменяющимся. Это значит, что средняя скорость и глубина изменяются очень медленно как при переходе от одного сечения к другому, так и во времени. Такого рода неустановившиеся движения получили название „длинных волн“, так как кривизна их мгновенных профилей ничтожна. У таких „волн“ длина обычно в сотни, тысячи и даже десятки тысяч раз превосходит тот подъем уровня, который ими вызывается. Однако не надо думать, что соответствующие подъемы уровня должны быть малы по сравнению с первоначальной глубиной. Вызываемые подъемы уровня могут быть произвольными и в некоторых случаях очень значительными, лишь бы изменения высоты уровня происходили с достаточной постепенностью. Некоторое исключение, как мы увидим дальше, будут представлять волны, фронт которых имеет вид вала. В момент прохождения такого вала высота уровня в данном сечении изменяется почти мгновенно на значительную величину. Дальнейшее же изменение уровня вновь происходит очень медленно.

Глубина в каналах и реках, а также подъемы уровня в них измеряются обычно несколькими метрами, в то время как длина рассматриваемых нами неустановившихся движений будет обычно измеряться километрами. Примерами таких неустановившихся движений могут служить волны, возникающие в реках при регулировании гидроэлектрических станций, паводки, приливные волны в устьях рек, волны, возникающие при разрушении плотин, и т. д.

Мы начнем изучение неустановившихся движений с того случая, когда силами сопротивления можно пренебречь.

Уравнения неустановившегося движения при отсутствии сил сопротивления и в случае призматического русла обладают частными решениями, зависящими от произвольных функций. Мы начнем с рассмотрения этих решений. Изучение этих частных решений позволит нам представить себе общий

характер неустановившихся движений, вызываемых произвольными „длинными волнами“.

Если пренебрегать силами сопротивления, то дно канала надо в общем случае считать горизонтальным. Уравнения (1.15) при этом переходят в уравнения

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial s} &= -\frac{g}{B} \frac{\partial F}{\partial s}, \\ \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial(UF)}{\partial s} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Эти уравнения, правда в несколько иной форме, были впервые даны Эри [38]. В частности для параболических русел (1.16) эти уравнения имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial s} &= -g \frac{\partial H}{\partial s}, \\ \frac{\partial H}{\partial t} + U \frac{\partial H}{\partial s} + \frac{H}{n} \frac{\partial U}{\partial s} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Установившееся движение в призматическом канале при отсутствии сил сопротивления будет равномерным движением:

$$\left. \begin{aligned} U &= u = \text{const.}, \\ H &= h = \text{const.} \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

В дальнейшем величины, относящиеся к первоначальному установившемуся движению в канале, будут обозначены  $u$ ,  $h$ ,  $f$  и  $b$ .

Уравнения (2.1) обладают двумя частными решениями, каждое из которых зависит от произвольной функции. Эти решения в случае канала прямоугольного поперечного сечения были найдены Сен-Венаном [26]. Совсем другим путем, также для канала прямоугольного сечения, эти интегралы были построены и изучены Риттером [24] и Мак-Кованом [19].

Для определения этих частных решений удобнее всего произвести замену переменных, приняв за независимые переменные  $F$  и  $t$ , а за неизвестные функции  $U$  и  $s$ .

Формулы преобразования будут

$$\left. \begin{aligned} U &= U^*(F, t), \\ s &= s(F, t), \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

откуда для производных получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial s} &= \frac{\frac{\partial U^*}{\partial F}}{\frac{\partial F}{\partial s}}, & \frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{\partial U^*}{\partial t} - \frac{\partial s}{\partial t} \frac{\partial U^*}{\partial s}, \\ \frac{\partial F}{\partial s} &= \frac{1}{\frac{\partial s}{\partial F}}, & \frac{\partial F}{\partial t} &= -\frac{\frac{\partial s}{\partial t}}{\frac{\partial s}{\partial F}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Уравнения (2.1) преобразуются при этом в уравнения

$$\left. \begin{aligned} \frac{F}{g} \left( \frac{\partial U}{\partial F} \right)^2 - \frac{1}{B} &= \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial s}{\partial F}, \\ \frac{\partial s}{\partial t} &= F \frac{\partial U}{\partial F} + U. \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

(В этих уравнениях верхний индекс при  $U$  опущен.)

Производная  $\frac{\partial s}{\partial t}$  представляет собой, как это видно из уравнений (2.4), скорость распространения постоянной площади живого сечения (или постоянной глубины).<sup>1</sup>

Частное решение уравнений (2.6) можно получить, полагая

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0,$$

т. е. считая, что средняя скорость остается неизменной при следовании за постоянной глубиной. Первое из уравнений (2.6) дает тогда

$$\frac{\partial U}{\partial F} = \pm \sqrt{\frac{g}{BF}}.$$

Интегрируя его и обозначая

$$\lambda = \int_0^F \sqrt{\frac{g}{BF}} dF, \quad (2.7)$$

получим:

$$U = \pm \lambda + C, \quad (2.8)$$

где  $C$  — произвольная постоянная.

Подставляя полученное значение  $U$  во второе уравнение (2.6) и интегрируя затем по  $t$ , получим:

$$s = \left( U \pm \sqrt{\frac{gF}{B}} \right) t + \varphi(F), \quad (2.9)$$

где  $\varphi(F)$  — произвольная функция.

Мы покажем, что решение (2.8) и (2.9) отвечает волнам, нарушающим первоначальное установившееся движение в канале. Такие волны мы будем называть в дальнейшем волнами одного направления. Более точное определение понятия волны будет дано ниже.

Пусть в канале существует установившееся движение (2.3). Определим в (2.8) постоянную  $C$  так, чтобы при  $F = f$  было бы  $U = u$ . Тогда

$$U = \pm [\lambda(F) - \lambda(f) \pm u].$$

Решение

$$\left. \begin{aligned} U &= \lambda(F) - \lambda(f) + u, \\ s &= \left[ \sqrt{\frac{gF}{B}} + \lambda(F) - \lambda(f) + u \right] t + \varphi^*(F) \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

<sup>1</sup> Второе уравнение (2.6) совпадает с уравнением Клейтца [14], которое приведено также у Форхгеймера [29, стр. 311].

отвечает волне, распространяющейся в сторону положительных значений  $s$  (фиг. 9). Такую волну мы будем называть прямой. Из уравнения (2.10) получаем

$$W = \frac{\partial s}{\partial t} = U + \sqrt{\frac{gF}{B}}, \quad (2.11)$$

т. е. скорость распространения постоянной глубины или живого сечения постоянной площади.

Решение

$$\left. \begin{aligned} U &= -\lambda(F) + \lambda(f) + u, \\ s &= - \left[ \sqrt{\frac{gF}{B}} + \lambda(F) - \lambda(f) - u \right] t + \varphi^*(F) \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

соответствует обратной волне, т. е. волне, распространяющейся в сторону отрицательных значений  $s$ . Обозначим через

$$\Omega = \frac{\partial s}{\partial t} = U - \sqrt{\frac{gF}{B}} \quad (2.13)$$

скорость распространения постоянной глубины при обратной волне.

Термины „прямая“ и „обратная“ волна будут относиться в дальнейшем только к волнам одного направления.

Рассмотрим для определенности прямую волну. Выбирая соответствующим образом функцию  $\varphi^*(F)$ , можно решить задачу о распространении волны одного направления, отвечающей данному изменению высоты уровня или расхода в каком-нибудь сечении канала.

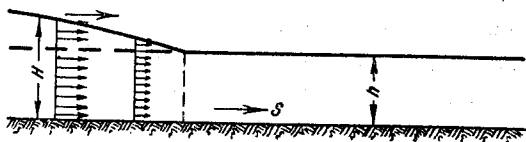
Пусть

$$F = F_i(t)$$

есть закон изменения уровня в сечении  $s = l$ . Решая это уравнение относительно  $t$ , получим

$$t = t_i(F). \quad (2.14)$$

Функция (2.14) будет однозначной только тогда, когда неустановившееся движение соответствует простому подъему уровня без дальнейшего понижения или, наоборот, понижению уровня без дальнейшего подъема. В дальнейшем, если не оговорено противное, мы будем называть волной одного направления (прямой или обратной) неустановившееся движение, соответствующее простому подъему или опусканию уровня.



Фиг. 9.

Таким образом, если функция (2.14) многозначна, то неустановившееся движение состоит из ряда последовательных волн. Уравнение прямой волны, отвечающей данному изменению уровня (2.14) в сечении  $s = l$ , будет:

$$\left. \begin{aligned} U &= \lambda(F) - \lambda(f) + u, \\ s &= W(F)[t - t_i(F)] + l. \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

Уравнение обратной волны, отвечающей тому же закону изменения уровня в сечении  $s=l$ , было бы:

$$\left. \begin{aligned} U &= -\lambda(F) + \lambda(f) + u, \\ s &= \Omega(F)[t - t_1(F)] + l. \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

Если в сечении  $s=l$  дано изменение расхода с течением времени, то, пользуясь тем, что

$$Q = UF = F[\lambda(F) - \lambda(f) + u],$$

можно свести этот случай к предыдущему.

Рассматривая выражение (2.11) для скорости распространения постоянной глубины, мы замечаем, что бóльшие глубины распространяются с бóльшими скоростями. Если волна отвечает подъему уровня, то отсюда следует, что бóльшие глубины нагоняют меньшие, причем мгновенный профиль волны становится все более и более крутым. В тот момент, когда мгновенный профиль волны будет иметь в каком-нибудь месте вертикальную касательную, произойдет разрушение волны вследствие ее опрокидывания. Мы сталкиваемся здесь с явлением, аналогичным тому, когда при установившемся движении глубина становится равной критической. Вблизи места разрушения волны движение жидкости уже не будет медленно изменяющимся. Для изучения этого движения надо будет так же, как в теории прыжка, сделать ряд новых гипотез и составить новые уравнения. Явление разрушения волн будет подробно рассмотрено в гл. 4.

Если волна отвечает понижению уровня, то, обратно, с течением времени мгновенный профиль ее постепенно сглаживается и уклон мгновенного профиля стремится к нулю.

Мы будем говорить, что волна испытывает разрушение, если ее скорость и ее глубина изменяются очень резко на небольшом участке русла или в течение очень короткого промежутка времени. При этом производные

$$\frac{\partial F}{\partial t}, \quad \frac{\partial F}{\partial s}, \quad \frac{\partial U}{\partial t} \quad \text{и} \quad \frac{\partial U}{\partial s}$$

(все или некоторые из них) обращаются в бесконечность. Вблизи места разрушения волны движение жидкости уже не является медленно изменяющимся. Явление разрушения волны в канале было впервые отмечено Сен-Венаном [26] и затем Риттером [24].

Если принять во внимание полную аналогию между уравнениями (2.1) и уравнениями одномерного неустановившегося движения газа, причем  $F$  играет роль плотности, то ясно, что волны одного направления совершенно аналогичны волнам Гюгоньо [11], а явление разрушения волны — явлению Гюгоньо. Эти волны были впервые найдены и изучены Риманом [23].

Для определения момента разрушения волны вычислим, пользуясь уравнениями (2.15), производную

$$\frac{\partial F}{\partial s} = B \frac{\partial H}{\partial s}.$$

<sup>1</sup> Изложение результатов, полученных Гюгоньо, можно найти в работе Адамара [1] в гл. IV.

Дифференцируя по  $s$  второе уравнение (2.15), имеем:

$$1 = W' [t - t_1(F)] \frac{\partial F}{\partial s} - W t_1'(F) \frac{\partial F}{\partial s},$$

откуда

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{1}{W' [t - t_1(F)] - W t_1'(F)}.$$

Приравнявая знаменатель нулю, получим уравнение для определения момента разрушения волны на разных глубинах:<sup>1</sup>

$$t = t_1(F) + \frac{W}{W'} t_1'(F). \quad (2.17)$$

Вычисляя  $W'$ , получим:

$$W' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{BF}} \left( 3 - \frac{F}{B} \frac{dB}{dF} \right),$$

откуда для русел, у которых  $\frac{F^3}{B}$  — возрастающая функция от  $F$ ,  $W' > 0$ .

Допустим теперь, что в сечении  $s=l$  разрушение волны не имеет места. Из уравнения (2.17) следует, что при  $t_1'(F) < 0$ , т. е. если волна отвечает понижению уровня и  $W > 0$ , разрушение волны не имеет места. Действительно, из (2.17) видно, что разрушение волны при данной глубине могло произойти только до появления этой глубины в сечении  $s=l$ . Условие  $W > 0$  отвечает тому, что волна не сносится вверх по течению.

Если же  $t_1'(F) > 0$ , т. е. волна отвечает повышению уровня над ординаром, разрушение волны обязательно произойдет. Момент разрушения отвечает наименьшему значению  $t$ , определенному из уравнения (2.17). Этот момент тем отдаленнее, чем медленнее совершается подъем уровня в сечении  $s=l$ . Совершенно аналогичные заключения получаются при исследовании обратной волны (2.16).

Рассмотрим более подробно вид мгновенного профиля и изменение средней скорости у волн одного направления. Начнем с прямой волны повышения (2.15)  $t_1'(F) > 0$ .

Пользуясь вторым уравнением (2.15) и применяя формулы (2.5), вычислим  $\frac{\partial F}{\partial s}$  и  $\frac{\partial F}{\partial t}$ :

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{1}{W' [t - t_1(F) - \frac{W}{W'} t_1'(F)]},$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{W}{W' [t - t_1(F) - \frac{W}{W'} t_1'(F)]}.$$

Кроме того, на основании первого уравнения (2.15)

$$\frac{\partial U}{\partial s} = \sqrt{\frac{g}{BF}} \frac{\partial F}{\partial s},$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \sqrt{\frac{g}{BF}} \frac{\partial F}{\partial t}.$$

<sup>1</sup> В декартовой системе координат ( $t$ ,  $s$  и  $F$ ) второе из уравнений (2.15) изображается линейчатой поверхностью. Уравнение (2.17) дает ребро возврата этой поверхности (см. Гурса [9], т. I, ч. 2, §§ 203—204).

Вплоть до момента разрушения волны (2.17)

$$t - t_l(F) - \frac{W}{W'(F)} t'_l(F) < 0,$$

так как при  $t = t_l(F)$

$$-\frac{W(F)}{W'(F)} t'_l(F) < 0.$$

Отметим, что при разрушении волны  $\frac{\partial F}{\partial s}$  и  $\frac{\partial U}{\partial s}$  обязательно обращаются в бесконечность, а  $\frac{\partial F}{\partial t}$  и  $\frac{\partial U}{\partial t}$  не обязательно обращаются в бесконечность. В том случае, когда  $W=0$ , может случиться, что  $\frac{\partial F}{\partial t}$  и  $\frac{\partial U}{\partial t}$  имеют конечные значения.

С течением времени  $\frac{\partial F}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial F}{\partial s}$ ,  $\frac{\partial U}{\partial t}$  и  $\frac{\partial U}{\partial s}$  возрастают по абсолютной величине, и в момент (2.17) происходит разрушение волн. По предположению  $W' > 0$ . Если, кроме того, выполнено условие

$$W = U + \sqrt{\frac{gF}{B}} > 0,$$

то из предыдущего следует, что вдоль волны вплоть до момента ее разрушения

$$\frac{\partial F}{\partial s} < 0, \frac{\partial U}{\partial s} < 0, \frac{\partial F}{\partial t} > 0 \text{ и } \frac{\partial U}{\partial t} > 0.$$

Мгновенный профиль этой волны изображен на фиг. 9.

Если волна соответствует понижению уровня, то  $t'_l(F) < 0$ , и при всех  $F$

$$t - t_l(F) - \frac{W}{W'} t'_l(F) > 0;$$

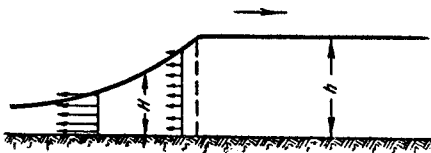
разрушения волны не происходит. С течением времени производные  $\frac{\partial F}{\partial s}$ ,  $\frac{\partial F}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial U}{\partial s}$  и  $\frac{\partial U}{\partial t}$  стремятся к нулю так, что волна все более и более сглаживается. Мгновенный профиль этой волны изображен на фиг. 10.

Если

$$W = U + \sqrt{\frac{gF}{B}} > 0,$$

то вдоль волны

$$\frac{\partial F}{\partial s} > 0, \frac{\partial U}{\partial s} > 0, \frac{\partial F}{\partial t} < 0 \text{ и } \frac{\partial U}{\partial t} < 0.$$



Фиг. 10.

Аналогичным образом при

$$U - \sqrt{\frac{gF}{B}} < 0$$

для обратной волны повышения

$$\frac{\partial F}{\partial s} > 0, \frac{\partial U}{\partial s} < 0, \frac{\partial F}{\partial t} > 0 \text{ и } \frac{\partial U}{\partial t} < 0$$

и для обратной волны понижения

$$\frac{\partial F}{\partial s} < 0, \quad \frac{\partial U}{\partial s} > c, \quad \frac{\partial F}{\partial t} < 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t} > 0.$$

Вычислим теперь функцию  $\lambda$  для некоторых профилей. Выражая  $\lambda$  через  $H$ , получим:

$$\lambda = \int_0^F \sqrt{\frac{g}{BF}} dF = \int_0^H \sqrt{\frac{g}{FB}} B dH,$$

откуда для параболических русел (1.16)

$$\lambda = \int_0^H \sqrt{\frac{gn}{H}} dH = 2\sqrt{gnH} \quad (2.18)$$

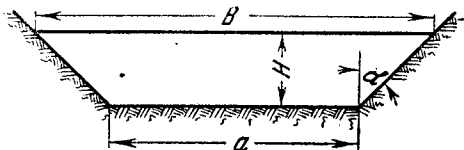
и

$$\sqrt{\frac{gF}{B}} = \sqrt{\frac{gH}{n}} = \frac{\lambda}{2n}. \quad (2.19)$$

В частности, при  $n=1$  (русло прямоугольного сечения) получаем хорошо известные значения для средней скорости и скорости распространения постоянной глубины, найденные Сен-Венаном [26] и Риттером [24]:

$$\left. \begin{aligned} U &= 2\sqrt{gH} - 2\sqrt{gh} + u, \\ W &= 3\sqrt{gH} - 2\sqrt{gh} + u. \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

Для русла трапециoidalного сечения (фиг. 11):



Фиг. 11.

$$B(F) = \sqrt{4 \operatorname{tg} \alpha F + a^2} \quad (\operatorname{tg} \alpha > 0),$$

$$\lambda(F) = \sqrt{g} \int_0^F \frac{dF}{\sqrt{4 \operatorname{tg} \alpha F^3 + a^2 F^2}}.$$

Этот интеграл выражается через эллиптические интегралы I и II рода:

$$\lambda(F) = \frac{4}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{ga}{\operatorname{tg} \alpha}} \left[ \frac{y}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{y^2-1}{y^2+1}} + E(\varphi, 45^\circ) - \frac{1}{2} F(\varphi, 45^\circ) + \frac{1}{2} F(90^\circ, 45^\circ) - E(90^\circ, 45^\circ) \right],$$

где

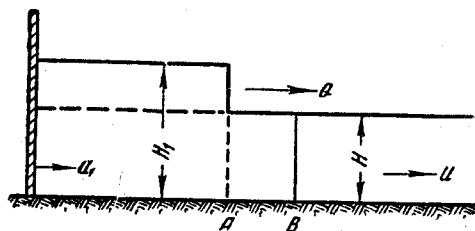
$$y = \sqrt{\frac{4 \operatorname{tg} \alpha}{a^2} F + 1}, \quad u = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{y^2+1}}, \quad u = \sin \varphi.$$

Волны одного направления, как это показали Сен-Венан [26] и затем Риттер [24], могут быть получены последовательным наложением бесконечно малых волн. Для простоты мы ограничимся примером канала прямоугольного сечения, причем ширину канала будем считать равной единице.

<sup>1</sup> При вычислениях можно воспользоваться таблицей эллиптических интегралов, изданной Гидравлико-Математическим Отделом ГГИ [28].



Найдем сначала бесконечно малую волну. Представим себе, что в канале с глубиной  $H$  и средней скоростью  $U$  движется с постоянной скоростью  $U_1$  стенка, перегородившая канал, причем  $U_1 > U$  (фиг. 12). Движение стенки вызывает подъем уровня, распространяющийся в канале в виде прерывной



Фиг. 12.

волны, т. е. в виде двух установившихся движений, сопрягающихся скачком. Вычислим высоту прерывной волны и скорость ее распространения. Обозначим через  $\theta$  скорость распространения фронта прерывной волны относительно покоящейся жидкости и рассмотрим все движение относительно наблюдателя,

перемещающегося со скоростью  $U$ . За единицу времени движущаяся стенка переместится относительно подвижного наблюдателя на расстояние  $U_1 - U$  и вытеснит количество жидкости, равное  $(U_1 - U) H_1$ . За это время фронт прерывной волны распространится относительно подвижного наблюдателя на расстояние  $\theta$  и, следовательно, добавочное количество жидкости, вызвавшее новый подъем уровня, будет

$$(H_1 - H) \theta.$$

Приравнявая полученные выражения, найдем:

$$(U_1 - U) H_1 = (H_1 - H) \theta. \quad (2.21)$$

Применим теперь уравнение количества движения к массе жидкости, заключенной между сечениями  $A$  и  $B$  (фиг. 12). Расстояние  $AB = \theta \Delta t$ . За начальный момент примем момент появления волны в сечении  $A$ . Изменение количества движения рассматриваемой массы жидкости за время  $\Delta t$  будет

$$\frac{\gamma}{g} \theta H \Delta t (U_1 - U),$$

а разность импульсов сил давления в сечениях, ограничивающих этот объем, равна

$$\left( \frac{\gamma H_1^2}{2} - \frac{\gamma H^2}{2} \right) \Delta t.$$

Приравнявая изменение количества движения импульсу сил и сокращая на  $\gamma \Delta t$ , получим:

$$g \left( \frac{H_1^2}{2} - \frac{H^2}{2} \right) = (U_1 - U) \theta H. \quad (2.22)$$

Если волна отвечает бесконечно малому подъему уровня, то уравнения (2.21) и (2.22) принимают вид:

$$\frac{dU}{dH} = \frac{\theta}{H}, \quad \theta = \frac{g}{dU/dH}.$$

Исключая из этих уравнений  $\theta$ , получим:

$$\frac{dU}{dH} = \sqrt{\frac{g}{H}}.$$

Рассматривая волну, отвечающую конечному подъему, как полученную наложением бесконечной последовательности бесконечно малых волн, получим, интегрируя предыдущее уравнение:

$$U = 2\sqrt{gH} + C.$$

Если первоначальная глубина и скорость в канале были  $h$  и  $u$ , то, определяя постоянную в предыдущем уравнении, получим:

$$U = 2\sqrt{gH} - 2\sqrt{gh} + u.$$

Для скорости распространения постоянной глубины  $\theta$ , относительно покоящейся жидкости, имеем:

$$\theta = \sqrt{gH},$$

а для абсолютной скорости

$$W = \theta + U = 3\sqrt{gH} - 2\sqrt{gh} + u.$$

Эти формулы совпадают с формулами (2.20).

Отметим, что из всех решений уравнений (2.1) наложением бесконечно малых волн удается получить только волны одного направления.

### § 7. Характеристики

При изучении дифференциальных уравнений в частных производных основное значение имеет исследование семейства некоторых кривых, расположенных на каждом решении рассматриваемых уравнений.<sup>1</sup> Эти кривые, называемые характеристиками, для уравнений, соответствующих какой-нибудь физической задаче, всегда имеют ясный физический смысл.

Общее исследование характеристик и выяснение их физического смысла при изучении неустановившегося движения в каналах и реках мы произведем для уравнений (1.15). Уравнения характеристик, отвечающие уравнениям (2.1) и (2.2), будут получены в качестве частных случаев из этих более общих уравнений.

Начнем с точного определения того, что мы будем называть в дальнейшем решением уравнений (1.15) [или (2.1)]. *Решением уравнений (1.15) мы будем называть функции*

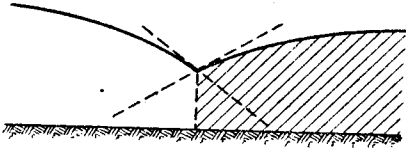
$$\left. \begin{aligned} U &= U(s, t), \\ F &= F(s, t), \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

*удовлетворяющие этим уравнениям, определенные в некоторой замкнутой области изменения переменных  $t$  и  $s$  и имеющие в этой области непрерывные производные первого порядка.*

Функции (2.23) определяют неустановившееся движение в некоторой части канала в течение некоторого определенного промежутка времени. *Неустановившееся движение, соответствующее некоторому решению (2.23), мы будем называть волной.*

<sup>1</sup> Относительно характеристик основные сведения можно найти в руководстве Гурса [9], т. III, гл. XXIV и в труде Адамара [1]. Мы приведем ниже доказательства всех тех свойств характеристик, которыми мы будем пользоваться в теории волн.

Перемещающуюся границу, которая отделяет одну волну от другой, называют фронтом волны. Вдоль этой границы терпят разрыв непрерывности первые производные от  $H$  и  $U$  по  $s$  и  $t$ , т. е. уклон свободной поверхности, ускорение и т. д. Если первые производные от  $H$  и  $U$  обращаются в бесконечность вдоль фронта волны, то волна испытывает разрушение. Движение жидкости перестает быть медленно изменяющимся, и уравнения (1.15) теряют свою силу вблизи места разрушения. Этот случай надо исследовать отдельно.



Фиг. 13.

Мы предположим сначала, что первые производные от  $U$  и  $H$  вдоль фронта волны терпят разрыв непрерывности, оставаясь вместе с тем ограниченными (фиг. 13).

Выведем уравнение распространения фронта волны, нарушающей данную волну. Допустим, что мы наблюдаем за волной (2.23), одновременно перемещающейся вдоль канала. Пусть закон нашего движения будет:

$$s = \varphi(t).$$

Наблюдаемые при таком перемещении изменения скорости и глубины будут связаны соотношениями

$$\left. \begin{aligned} dF &= \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial s} \varphi'(t) dt, \\ dU &= \frac{\partial U}{\partial t} dt + \frac{\partial U}{\partial s} \varphi'(t) dt. \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

Вдоль линии  $s = \varphi(t)$  производные от  $U$  и  $F$  по  $t$  и  $s$  связаны также уравнениями (1.15).

Обозначим для сокращения

$$g \left( i_0 - \frac{U^2}{C^2 R} \right) = K.$$

Для определения первых производных от  $U$  и  $F$  вдоль линии  $s = \varphi(t)$  имеем систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{g}{B} \frac{\partial F}{\partial s} - K = 0, \\ E_2 &= F \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial t} + U \frac{\partial F}{\partial s} = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial t} dt + \frac{\partial U}{\partial s} ds &= dU, \\ \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial s} ds &= dF, \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

где  $ds = \varphi'(t) dt$  и  $U$ ,  $F$ ,  $dU$  и  $dF$  суть известные функции от  $t$  вдоль линии  $s = \varphi(t)$ .

Для решения системы (2.25) поступим следующим образом. Обозначим

$$\frac{\partial U}{\partial t} = p_1, \quad \frac{\partial U}{\partial s} = q_1, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = p_2, \quad \frac{\partial F}{\partial s} = q_2$$

и исключим, пользуясь двумя последними уравнениями (2.25),  $p_1$  и  $p_2$  из первых двух уравнений.

Решим последние из уравнений (2.25) относительно  $p_1$  и  $p_2$ :

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{dU}{dt} - q_1 \frac{ds}{dt}, \\ p_2 &= \frac{dF}{dt} - q_2 \frac{ds}{dt}. \end{aligned}$$

Подставляя эти значения в первые два уравнения, получим:

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= \left( U - \frac{ds}{dt} \right) q_1 + \frac{g}{B} q_2 + \left( \frac{dJ}{dt} - K \right) = 0, \\ E_2 &= F q_1 + \left( U - \frac{ds}{dt} \right) q_2 + \frac{dF}{dt} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

Решая затем уравнения (2.26) относительно  $q_1$  и  $q_2$ , получим:

$$q_1 = \frac{D_1}{D}, \quad q_2 = \frac{D_2}{D}, \quad (2.27)$$

где

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} U - \frac{ds}{dt} & \frac{g}{B} \\ F & U - \frac{ds}{dt} \end{vmatrix}, \\ D_1 &= \begin{vmatrix} -\frac{dJ}{dt} + K & \frac{g}{B} \\ -\frac{dF}{dt} & U - \frac{ds}{dt} \end{vmatrix}, \\ D_2 &= \begin{vmatrix} U - \frac{ds}{dt} & -\frac{dU}{dt} + K \\ F & -\frac{dF}{dt} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Если определитель  $D$  отличен от нуля, то формулы (2.27) дают вдоль линии  $s = \varphi(t)$  определенные единственные значения производных, зависящие только от значений глубины и скорости, наблюдавшихся при перемещении  $s = \varphi(t)$  вдоль волны.

Если линия  $s = \varphi(t)$  есть фронт какой-нибудь волны, нарушающей данную волну, то вдоль этой линии существуют два различные значения уклона свободной поверхности (фиг. 13), а также различные значения других производных от  $U$  и  $H$  по  $t$  и  $s$ , относящиеся к волнам, отделенным друг от друга этим фронтом. Отсюда следует, что вдоль фронта волны знаменатель в уравнениях (2.27) обращается в нуль.

Если числитель в этих уравнениях отличен от нуля, то производные от  $U$  и  $H$  по  $s$  и  $t$  обращаются в бесконечность и вдоль фронта происходит разрушение волны. Этот случай будет рассмотрен в гл. 4. Если же вдоль фронта волны первые производные от  $U$  и  $H$  терпят разрыв непрерывности, оставаясь вместе с тем ограниченными, то числители в уравнениях (2.27) должны также обращаться в нуль вдоль линии  $s = \varphi(t)$ . Приравнявая нулю  $D$  и  $D_1$ , получим систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 - 2U \frac{ds}{dt} + U^2 - \frac{gF}{B} &= 0, \\ \left( \frac{ds}{dt} - U \right) \left( \frac{dJ}{dt} - K \right) + \frac{g}{B} \frac{dF}{dt} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

Заметим, что определитель  $D_2$  обращается в нуль одновременно с определителями  $D$  и  $D_1$ .

Решая первое из уравнений (2.28) относительно  $\frac{ds}{dt}$ , получим для скорости распространения фронта волны одно из двух значений:

$$\frac{ds}{dt} = U \pm \sqrt{\frac{gF}{B}}.$$

Подставляя последовательно каждый из полученных корней во второе уравнение (2.28), получим две системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} ds &= \left( U + \sqrt{\frac{gF}{B}} \right) dt, \\ dU + \sqrt{\frac{g}{BF}} dF &= g \left( i_0 - \frac{U^2}{C^2 R} \right) dt \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

и

$$\left. \begin{aligned} ds &= \left( U - \sqrt{\frac{gF}{B}} \right) dt, \\ dU - \sqrt{\frac{g}{BF}} dF &= g \left( i_0 - \frac{U^2}{C^2 R} \right) dt. \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

Уравнения (2.29) и (2.30) называются дифференциальными уравнениями характеристик. Первое из уравнений (2.29) определяет скорость распространения фронта волны, нарушающей данную волну, который распространяется в сторону положительных значений  $s$ , а первое из уравнений (2.30) — скорость фронта, распространяющегося в сторону отрицательных значений  $s$ . Характеристикой называют совокупность  $t = t(\mu)$ ,  $s = s(\mu)$ ,  $U = U(\mu)$  и  $F = F(\mu)$ , удовлетворяющую либо уравнениям (2.29), либо уравнениям (2.30).

Характеристика дает закон распространения фронта волны, нарушающей данную волну, и изменение глубины и средней скорости вдоль этого фронта. Уравнениям (1.15) и (2.1) отвечают, как мы видим, два действительных и различных семейства характеристик. Эти уравнения принадлежат, следовательно, к так называемым уравнениям гиперболического типа.

Обозначим скорости распространения фронтов волн

$$\left. \begin{aligned} W &= U + \sqrt{\frac{gF}{B}}, \\ Q &= U - \sqrt{\frac{gF}{B}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

Семейство характеристик, определяемое уравнениями (2.29), мы будем называть в дальнейшем первым семейством, а семейство, определяемое уравнениями (2.30), — вторым.

Докажем теперь некоторые свойства характеристик.

Пусть

$$\left. \begin{aligned} U &= U(t, s), \\ F &= F(t, s) \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

есть какое-то решение уравнений (1.15) (какая-то волна). Назовем совокупность значений  $t$ ,  $s$ ,  $U$  и  $F$  элементом.

**Теорема I.** *Через каждый элемент решения (2.32) проходят две характеристики.*

Покажем, что если подставить в уравнение (2.29) вместо  $U$  и  $F$  их значения из (2.32), то эти уравнения станут следствиями друг друга и в результате останется только одно уравнение, интегрирование которого дает характеристику. Это заключение будет относиться также к уравнениям (2.30).

Умножая первое из уравнений (2.26) на  $U - \frac{ds}{dt}$ , а второе на  $\frac{g}{B}$  и вычитая затем друг из друга, получим тождество:

$$E_1 \left( U - \frac{ds}{dt} \right) - E_2 \frac{g}{B} \equiv Dq_1' - D_1. \quad (2.33)$$

Подставляя в (2.33) вместо  $U$  и  $F$  их значения из (2.32), получим:

$$[D]q_1 - [D_1] \equiv 0,$$

так как  $[E_1] \equiv [E_2] \equiv 0$ . Знак  $[ ]$  означает результат замены  $U$  и  $F$  их значениями из (2.32).

Предыдущее равенство справедливо при всех рассматриваемых значениях  $t$  и  $s$  и, в частности, при значениях, связанных первым уравнением (2.29). Подставляя теперь вместо  $\frac{ds}{dt}$  его значение из первого уравнения (2.29), получим вдоль рассматриваемой линии

$$[D_1] \frac{ds}{dt} = w \equiv 0.$$

Таким образом второе из уравнений (2.29) удовлетворяется тождественно. Аналогичным образом

$$[D_1] \frac{ds}{dt} = \Omega \equiv 0.$$

Таким образом для определения характеристик, расположенных на данном решении, остаются два дифференциальных уравнения

$$\text{и} \quad \left. \begin{aligned} ds &= W dt, \\ ds &= \Omega dt. \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

Каждое из этих уравнений определяет характеристику, проходящую через любой элемент решения (2.32). Каждое решение (2.32) оказывается, таким образом, покрытым двумя семействами линий — сеткой характеристик. Эти характеристики представляют собой законы распространения фронтов всех мыслимых волн, могущих нарушить волну, определяемую уравнениями (2.32).

Таким образом, если волна известна, то распространение фронта другой волны, нарушающей данную, определяется интегрированием одного из двух уравнений (2.34).<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Отметим, что теорема I справедлива и для решений вида (2.35). Однако в этом случае уравнения характеристик не обязательно будут выражаться уравнениями (2.34). Примеры этого будут приведены ниже.

**Теорема II.** Пусть дана совокупность элементов, зависящая от двух параметров

$$\left. \begin{aligned} t &= t(\alpha, \beta), \\ s &= s(\alpha, \beta), \\ U &= U(\alpha, \beta), \\ F &= F(\alpha, \beta) \end{aligned} \right\} \quad (2.35)$$

и пусть в некоторой области  $C$  изменения этих параметров, при  $\alpha = \text{const}$  ( $\alpha$  — любое значение параметра из  $C$ ), совокупность (2.35) удовлетворяет уравнениям (2.29), а при  $\beta = \text{const}$  — уравнениям (2.30), где  $\beta$  — любое значение из  $C$ . Линии  $\alpha = \text{const}$  и  $\beta = \text{const}$  являются, таким образом, характеристиками уравнений (1.15), принадлежащими к разным семействам, а совокупность (2.35) составлена из сетки этих характеристик. Докажем, что в этом случае совокупность (2.35) есть решение уравнений (1.15) в области  $C$ .

Подставим (2.35) в уравнения для  $E_1$  и  $E_2$  (2.25) и допустим, что левая часть этих уравнений не обращается тождественно в нуль в области  $C$ . Пусть хоть одно из выражений  $E_1$  или  $E_2$  отлично от нуля при  $\alpha = \alpha_0$  и  $\beta = \beta_0$ , где  $\alpha_0$  и  $\beta_0$  принадлежат  $C$ . Подставим (2.35) в тождество (2.33). Вычисляя  $ds$ ,  $dt$ ,  $dU$  и  $dF$  один раз в предположении, что  $\alpha = \text{const}$ , и другой раз в предположении, что  $\beta = \text{const}$ , получим:

$$\begin{aligned} [E_1]_0 [U - W]_0 - [E_2]_0 \left[ \frac{g}{B} \right]_0 &= 0, \\ [E_1]_0 [U - \Omega]_0 - [E_2]_0 \left[ \frac{g}{B} \right]_0 &= 0, \end{aligned}$$

где прямые скобки со значком обозначают результат замены  $s$ ,  $t$ ,  $U$  и  $F$  их значениями из (2.35) и то, что значения этих функций взяты в точке  $\alpha = \alpha_0$ ,  $\beta = \beta_0$ .

Из этих уравнений, принимая во внимание, что  $[W - \Omega]_0 \neq 0$  и  $[B]_0 \neq \infty$ , следует, что  $[E_1]_0 = [E_2]_0 = 0$ , а это противоречит сделанному выше допущению.

Эта последняя теорема показывает, что для определения какого-нибудь решения системы (1.15) достаточно построить соответствующую этому решению сетку характеристик.

В заключение отметим одно важное свойство характеристик. Характеристики остаются инвариантными при любом преобразовании переменных вида

$$\begin{aligned} x &= \varphi_1(U, F, t, s), & y &= \varphi_2(U, F, t, s), \\ z_1 &= \varphi_3(U, F, t, s), & z_2 &= \varphi_4(U, F, t, s), \end{aligned}$$

где  $x$  и  $y$  — новые независимые переменные, а  $z_1$  и  $z_2$  — новые неизвестные функции.

Действительно, при таком преобразовании решения уравнений (1.15) переходят в решения преобразованного уравнения, а линия пересечения двух решений в пространстве  $(t, s, F, U)$  — в линию пересечения преобразованных решений.

§ 8. Характеристики установившегося движения

Займемся вычислением характеристик для рассмотренных выше частных решений уравнений (1.15). Начнем с установившегося движения.

Если движение равномерное, то

$$U = u = \text{const}, H = h = \text{const}.$$

Уравнения (2.34) дают:

$$ds = \left( u + \sqrt{\frac{gf}{b}} \right) dt$$

и

$$ds = \left( u - \sqrt{\frac{gf}{b}} \right) dt,$$

откуда, интегрируя, получим:

$$\left. \begin{aligned} s &= \left( u + \sqrt{\frac{gf}{b}} \right) t + k, \\ s &= \left( u - \sqrt{\frac{gf}{b}} \right) t + l. \end{aligned} \right\} \quad (2.36)$$

Первое из этих уравнений дает закон распространения фронта прямой волны, нарушающей данное равномерное движение, а второе уравнение — закон распространения фронта обратной волны. Постоянные  $k$  и  $l$  определяются моментом появления этих волн. Меняя  $k$  и  $l$ , мы получим законы распространения всех возможных волн, могущих нарушить данное равномерное движение.

В случае неравномерного движения мы ограничимся вычислением характеристик для параболических русел. Исключая  $ds$  из уравнения (1.32) и уравнений (2.34), получим:<sup>1</sup>

$$dt = \frac{1}{i_0} \frac{H^\alpha - H_k^\alpha}{H^\alpha - H_0^\alpha} \frac{1}{U + \sqrt{\frac{gH}{n}}} dH$$

и

$$dt = \frac{1}{i_0} \frac{H^\alpha - H_k^\alpha}{H^\alpha - H_0^\alpha} \frac{1}{U - \sqrt{\frac{gH}{n}}} dH,$$

где  $\alpha = 2n + 1$ .

Принимая во внимание (1.16) и (1.24), получим:

$$U + \sqrt{\frac{gH}{n}} = \frac{Q_0}{AH^n} + \sqrt{\frac{gH}{n}} = \sqrt{\frac{g}{n} \frac{H_k^{\frac{\alpha}{2}} + H^{\frac{\alpha}{2}}}{H^n}},$$

откуда

$$dt = \frac{1}{i_0} \frac{H^{\frac{\alpha}{2}} - H_k^{\frac{\alpha}{2}}}{H^\alpha - H_0^\alpha} H^n dH$$

<sup>1</sup> Результаты, относящиеся к вычислению характеристик установившегося движения для параболических русел, принадлежат С. А. Керцелли [13].



и совершенно аналогичным образом

$$dt = \frac{1}{i_0} \frac{H^{\frac{x}{2}} + H_k^{\frac{x}{2}}}{H^x - H_0^x} H^n dH.$$

Так же, как это делается при построении кривых подпора и спада, преобразуем эти уравнения, вводя новую независимую переменную

$$\eta = \frac{H}{H_0}.$$

После преобразования к новой переменной и интегрирования мы получим для фронта волны, распространяющейся в сторону положительных значений  $s$ ,

$$t = \frac{1}{i_0 H_0^{\frac{x}{2} - n - 1}} C(\eta) - \frac{H_k^{\frac{x}{2}}}{i_0 H_0^{x - n - 1}} A(\eta) + \text{const}, \quad (2.37)$$

а для характеристики, отвечающей закону распространения фронта обратной волны

$$t = \frac{1}{i_0 H_0^{\frac{x}{2} - n - 1}} C(\eta) + \frac{H_k^{\frac{x}{2}}}{i_0 H_0^{x - n - 1}} A(\eta) + \text{const}, \quad (2.37a)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A(\eta) &= \int \frac{\eta^n}{\eta^x - 1} d\eta + \text{const}, \\ C(\eta) &= \int \frac{\eta^{\frac{x}{2} + n}}{\eta^x - 1} d\eta + \text{const}. \end{aligned} \right\} \quad (2.38)$$

С. А. Керцелли [13] составила таблицы для вычисления интегралов (2.38) при  $x=3$  и  $4$ , т. е. для русел прямоугольного сечения и русел, соответствующих параболам второй степени. Эти таблицы составлены для значений  $\eta$ , соответствующих таблицам Б. А. Бахметева [4, 5]. Таблицы эти приведены в прил. III.

Уравнения (2.37) и (2.37a) совместно с уравнением (1.45) дают законы распространения фронтов волн одного направления (прямой и обратной).

Таблицы С. А. Керцелли являются исходными данными при расчете волн одного направления (см. гл. 6).

## § 9. Характеристики прямой и обратной волны

Займемся теперь определением характеристик прямой и обратной волны (2.15) и (2.16). При отсутствии сил сопротивления уравнения (1.15) переходят в уравнения (2.1). Уравнения характеристик для (2.1) получаем из уравнений (2.29) и (2.30), полагая в них  $i_0 - \frac{U^2}{C^2 R} = 0$ .

Таким образом для характеристик уравнений (2.1) имеем следующие уравнения:

первое семейство:

$$\left. \begin{aligned} ds &= \left( U + \sqrt{\frac{gF}{B}} \right) dt, \\ dU + \sqrt{\frac{g}{FB}} dF &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.39)$$

второе семейство:

$$\left. \begin{aligned} ds &= \left( U - \sqrt{\frac{gF}{B}} \right) dt, \\ dU - \sqrt{\frac{g}{FB}} dF &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.40)$$

Рассмотрим теперь для определенности прямую волну

$$\left. \begin{aligned} U &= \lambda(F) - \lambda(f) + u, \\ s &= W(F)[t - t_1(F)] + l. \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

Вдоль прямой волны  $dU$  и  $dF$  связаны соотношением, получающимся путем дифференцирования первого уравнения (2.15):

$$dU = \sqrt{\frac{g}{BF}} dF.$$

Подставляя это выражение во второе уравнение (2.39), получим:

$$dF = 0.$$

Следовательно, вдоль характеристики первого семейства  $F = \text{const}$ . Таким образом характеристики этого семейства дают закон распространения постоянной глубины или живого сечения постоянной площади. Второе уравнение (2.15) при  $F = \text{const}$  дает уравнение этих характеристик в виде

$$s = W(F)[t - t_1(F)] + l \quad (2.41)$$

при  $F = \text{const}$ .

Первое уравнение (2.39) удовлетворяется тождественно в силу (2.41). Уравнение (2.41) дает закон распространения фронта, отделяющего прямую волну от установившегося движения.

Подставляя теперь (2.15) во второе уравнение (2.40), мы замечаем, что оно при этом удовлетворяется тождественно. Дифференциальное уравнение характеристики в этом случае будет

$$ds = \left( U - \sqrt{\frac{gF}{B}} \right) dt.$$

Подставим в это уравнение вместо  $U$  его значение из (2.15) и исключим затем  $ds$  при помощи второго уравнения (2.15). Дифференцируя (2.15), имеем:

$$ds = W dt + t W' dF - \{W t_1(F)\}' dF.$$

Подставляя вместо  $ds$  его значение из первого уравнения (2.40), получим для определения характеристики второго семейства линейное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\frac{dt}{dF} + \frac{W'}{2\sqrt{\frac{gF}{B}}} t - \frac{\{W t_1(F)\}'}{2\sqrt{\frac{gF}{B}}} = 0. \quad (2.42)$$

Интегрируя это уравнение, имеем:

$$t = \frac{1}{2\sqrt{g}} \sqrt[4]{\frac{B}{F^3}} \int_f^F \{W(F) t_1(F)\}' \sqrt[4]{FB(F)} dF + \tau \sqrt[4]{\frac{B}{F^3}}, \quad (2.43)$$

где  $\tau$  — параметр, определяющий характеристику.

Присоединяя к (2.43) второе уравнение (2.15), получим уравнение характеристики в параметрическом виде.

В частности, для параболических русел уравнение (2.43) дает:

$$t = \frac{1}{2} \sqrt[4]{\frac{n}{g^2 A^2 H^{2n+1}}} \int_h^H \{W(H) t_1(H)\}' \sqrt[4]{A^2 n H^{2n-1}} dH + \tau \sqrt[4]{\frac{n}{A^3 H^{2n+1}}}. \quad (2.43a)$$

Характеристики (2.43) определяют закон распространения фронта встречной волны, возникающей при встрече прямой волны с обратной или при отражении прямой волны в каком-нибудь сечении канала. Значение параметра  $\tau$  определяется моментом возникновения новой волны.

Так как уравнение (2.43) определяет распространение фронта волны в сторону, обратную движению волны, то при волне повышения вдоль этого фронта должно быть  $\frac{dt}{dF} > 0$ , а при волне понижения  $\frac{dt}{dF} < 0$ .

Из уравнения (2.42) следует, что

$$\frac{dt}{dF} = -\frac{W'}{2\sqrt{\frac{gF}{B}}} \left\{ t - t_1(F) - \frac{W}{W'} t_1'(F) \right\}. \quad (2.44)$$

Мы рассматриваем только те русла, для которых  $\frac{F^3}{B}$  есть возрастающая функция от  $F$ . Условие  $W' > 0$ , как было отмечено выше, эквивалентно этому условию. Мы предполагаем также, что в сечении  $s=l$  разрушения волны не происходит.

Тогда из уравнения (2.44) следует, что при  $t_1'(F) < 0$  (волна понижения)  $\frac{dt}{dF} < 0$ , так как выражение, стоящее в скобках в правой части предыдущего равенства, положительно при всех  $F$  [ $t$  всегда больше, чем  $t_1(F)$  при данном  $F$ ]. В случае, если  $t_1'(F) > 0$  (волна повышения),  $\frac{dt}{dF} > 0$  вплоть до момента, когда при каком-нибудь значении  $F$  выражение, стоящее в скобках в правой части уравнения, не обратится в нуль. Сопоставляя эти выводы с условием (2.17), можно сказать, что изменение  $t$  в зависимости от  $F$  происходит монотонно вплоть до момента опрокидывания волны.

Рассмотрим также, как изменяется  $s$  вдоль характеристики второго семейства. Из первого уравнения (2.40) следует:

$$\frac{ds}{dF} = \left( U - \sqrt{\frac{gF}{B}} \right) \frac{dt}{dF}.$$

Так как  $\frac{dt}{dF}$  сохраняет свой знак до момента разрушения волны, то знак  $\frac{ds}{dF}$  может измениться только в том случае, когда  $U - \sqrt{\frac{gF}{B}}$  изменяет свой знак.

Если

$$U - \sqrt{\frac{gF}{B}} < 0, \quad (2.45)$$

поток находится в спокойном состоянии (1.40) и, принимая во внимание знак  $\frac{dt}{dF}$ , мы заключаем, что фронт отраженной (встречной) волны распространяется вверх по течению в сторону отрицательных значений  $s$ . Если же поток находится в бурном состоянии, то

$$U > \sqrt{\frac{gF}{B}}$$

и фронт встречной волны сносится вниз по течению в сторону положительных значений  $s$ .

Совершенно аналогичное заключение получается при исследовании обратной волны (2.16). Только при этом характеристики первого и второго семейства как бы меняются ролями.

Уравнения характеристик второго семейства для обратной волны (2.40) будут

$$\left. \begin{aligned} s &= \Omega(F) [t - t_1(F)] + l, \\ F &= \text{const.} \end{aligned} \right\} \quad (2.46)$$

Дифференциальное уравнение характеристик первого семейства будет:

$$\frac{dt}{dF} - \frac{\Omega'}{2\sqrt{\frac{gF}{B}}} t + \frac{\{\Omega t_1(F)\}'}{2\sqrt{\frac{gF}{B}}} = 0. \quad (2.47)$$

Интегрируя это уравнение, получим:

$$t = -\frac{1}{2\sqrt{g}} \sqrt[4]{\frac{B}{F^3}} \int_f^F \{\Omega t_1(F)\}' \sqrt[4]{FB(F)} dF + \tau_1 \sqrt[4]{\frac{B}{F^3}}. \quad (2.48)$$

Присоединяя к уравнению (2.48) второе уравнение (2.16), получим параметрическое уравнение распространения фронта встречной волны. При

$$U + \sqrt{\frac{gF}{B}} > 0$$

этот фронт распространяется в сторону, противоположную движению волны (в сторону положительных значений  $s$ ). Если же поток находится в бурном состоянии, то

$$U < -\sqrt{\frac{gF}{B}}$$

и фронт встречной волны сносится вниз по течению.